1. Coordonnées de vecteurs

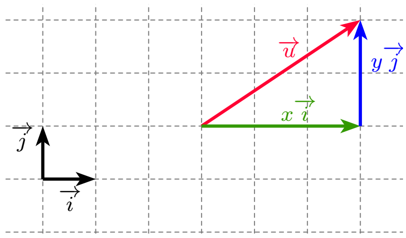
1.1. Base orthonormée

Définition 1. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$. Le couple $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est appelé **base orthonormée** des vecteurs du plan.

Propriété 1.

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose *de manière unique* sous la forme $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ où x et y sont des nombres réels.
$(x;y)$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

Notations : $\vec{u}(x;y)$ (vecteur ligne) ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (vecteur colonne).



Ici $\vec{u}(3;2)$

Remarque 1. On note $x_{\vec{u}}$ l'abscisse de $\vec{u}$ et $y_{\vec{u}}$ l'ordonnée de $\vec{u}$.

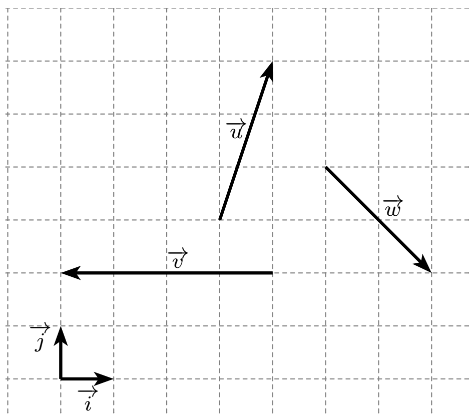
Exemple 1. Dans le plan muni de base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$.
Lire les coordonnées des vecteurs :

$\vec{u}$: ....

$\vec{v}$: ....

$\vec{w}$: ....

Construire les vecteurs $\vec{m}(2;-3)$ et $\vec{p}(-1;-1)$



Propriété 2.

Dans la base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$, deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont *égaux* si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

1.2. Repère orthonormée

Définition 2. On appelle **repère orthonormé** du plan le triplet $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$ constitué par un point O du plan appelé *origine* et par les vecteurs d'une base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

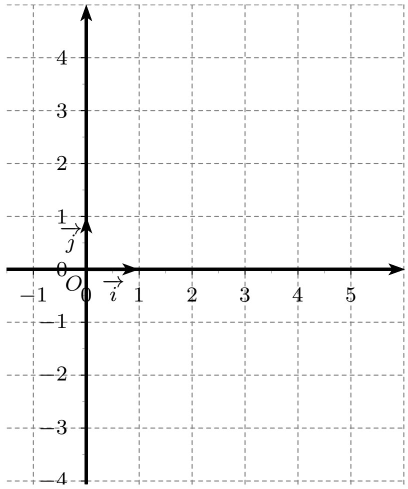
Remarque 2. Soit M le point de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$. Cela signifie que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

Exemple 2. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(5;2)$. On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, donner les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Propriété 3.

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A;y_B-y_A)$ dans base orthonormée $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

Exemple 3. On se place dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$. On considère les points $A(1;4)$, $B(5;3)$ et $C(-1;-3)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. (On complétera le repère ci-dessous).



2. Coordonnées et opérations

On se place dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

2.1. Somme de deux vecteurs

Propriété 4.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

Exemple 4. Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(-6;2)$ et $\overrightarrow{v}(3;7)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, puis celles du vecteurs $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.

2.2. Produit d'un vecteur par un réel

Propriété 5.

Soient k un nombre réel et $\overrightarrow{u}(x;y)$ un vecteur. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$.

Remarque 3. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont proportionnelles.

Exemple 5. Soit $\overrightarrow{u}(2;-5)$. Calculer les coordonnées du vecteur $3\overrightarrow{u}$, puis celles du vecteurs $-4\overrightarrow{u}$.

2.3. Norme d'un vecteur

Propriété 6.

Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$. La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$ est égale à $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exemple 6. Soit $\overrightarrow{u}(4;-2)$. Calculer $||\overrightarrow{u}||$.

Exemple 7. Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(-4;7)$ et $\overrightarrow{v}(6;-2)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{u}-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, puis la norme du vecteur $\overrightarrow{w}$.

3. Colinéarité

Définition 3. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits **colinéaires** si et seulement s'ils ont même direction. Alors il existe un réel non nul k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque 4. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.

Exemple 8. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-6;4)$ et $\overrightarrow{CD}(3;-2)$ sont colinéaires.

Définition 4.
On appelle **déterminant** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ le nombre $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CD}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{CD}}$

Exemple 9. Soient $\overrightarrow{AB}(5;6)$ et $\overrightarrow{CD}(4;-2)$. Calculer $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$.

Propriété 7.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$

♣ **Démonstration 1.**
- $(\Longrightarrow)$

- $(\Longleftarrow)$

Exemple 10. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2;-7)$ et $\overrightarrow{CD}(-1;\frac{7}{2})$ sont colinéaires.

Propriété 8.

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve. Les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si (AB) et (AC) sont parallèles (ou deux points sont confondus), ce qui équivaut à (AB) et (AC) confondues puisqu'elles ont un point commun.

Exemple 11. Montrer que les points $A(0;1)$, $B(\sqrt{2};2)$, et $C(2;\sqrt{2}+1)$ sont alignés.

Propriété 9.

M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \iff \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exemple 12. Soient $I(1;0)$, $A(-2;3)$ et $B(4;-3)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AB}$. Que remarque t-on ?