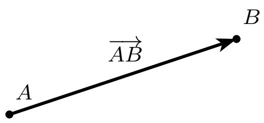
Chapitre 7 : Vecteurs
Seconde, 2020-2021

1. Notions de vecteur

1.1. Vecteur et translation

Définition 1.
On considère deux points A et B du plan.
La **translation** qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



Remarque 1. Le point A est l'**origine** du vecteur, le point B son **extrémité**.
Si les points A et B sont confondus ($A = B$), on parle de **vecteur nul**. On le note $\overrightarrow{0}$.

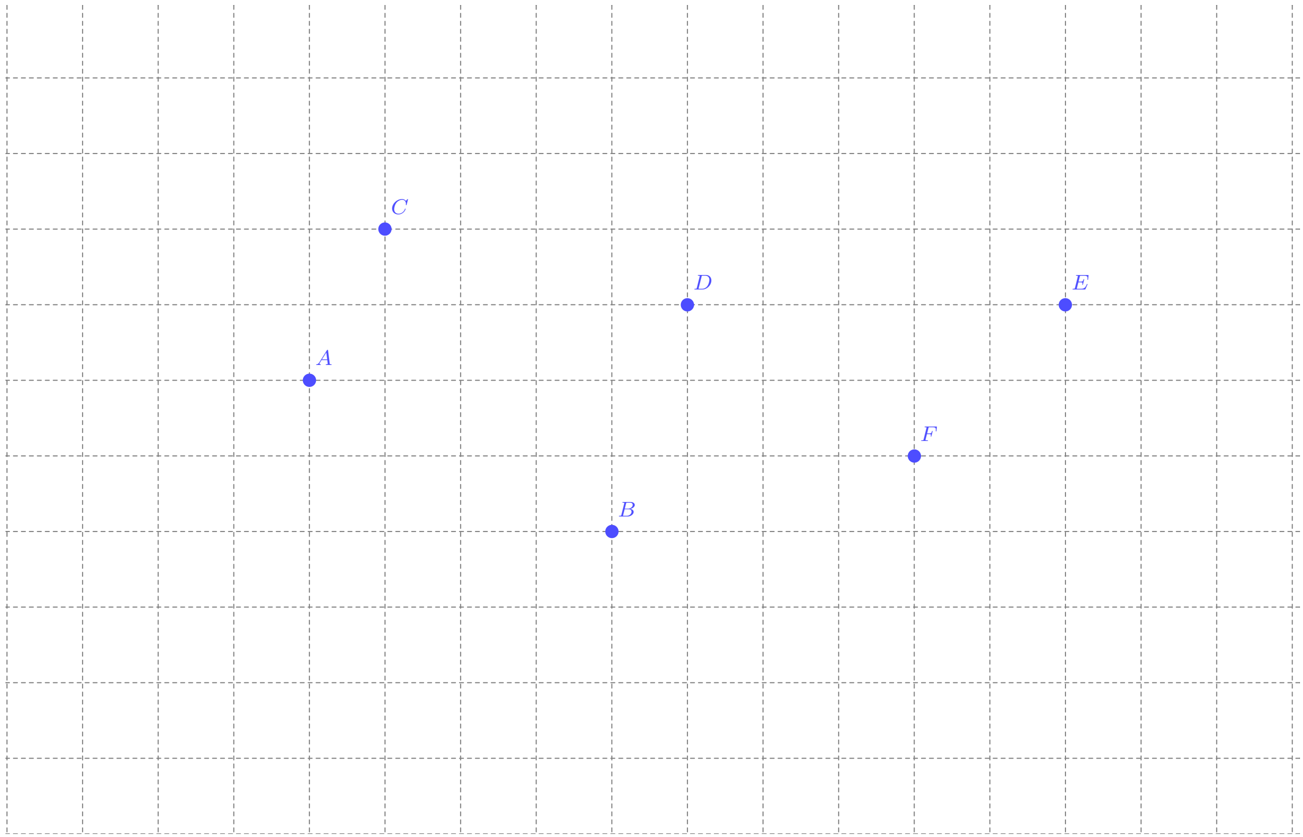
Définition 2.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB)),
- sa **norme** (la longueur du segment $[AB]$),
- son **sens** (de A vers B).

Remarque 2. La longueur AB est appelée **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On la note $||\overrightarrow{AB}||$.

Exemple 1.

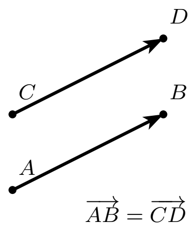
- ✎ Construire les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FE}$.
- ✎ Construire le point G, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
- ✎ Construire le point H, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ suivie de la translation du vecteur $\overrightarrow{FE}$.
- ✎ Construire le point A' sachant que A est l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$
- ✎ Construire le point B' sachant que B est l'image de B' par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$



1. 2. Égalité de deux vecteurs

Propriété 1.

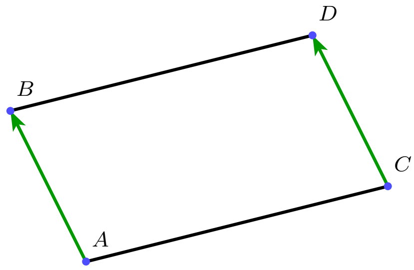
Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.



Exemple 2. En utilisant les résultats de l'exemple 1. indiquer les vecteurs qui sont égaux.

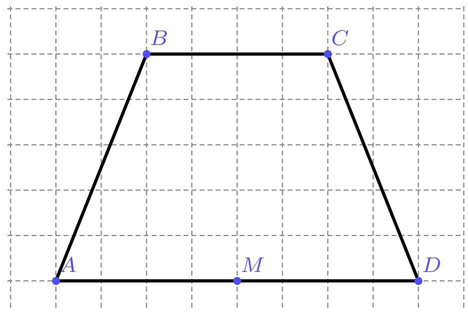
Propriété 2.

$ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement « aplati ») si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



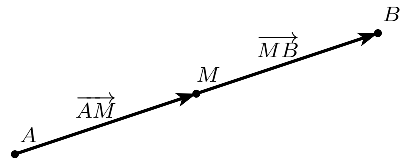
Remarque 3. Attention à l'ordre des sommets. Ici $ABDC$ et non $ABCD$.

Exemple 3. Soit $ABCD$ un trapèze. On note M le milieus de $[AD]$. Trouver deux parallélogrammes. Justifier.



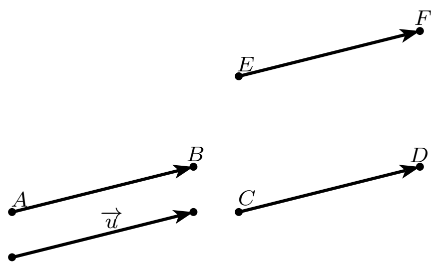
Propriété 3.

M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.



1. 3. Vecteur $\vec{u}$ et ses représentants

Définition 3.
Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$,..., indépendamment des deux points.
Par conséquent, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

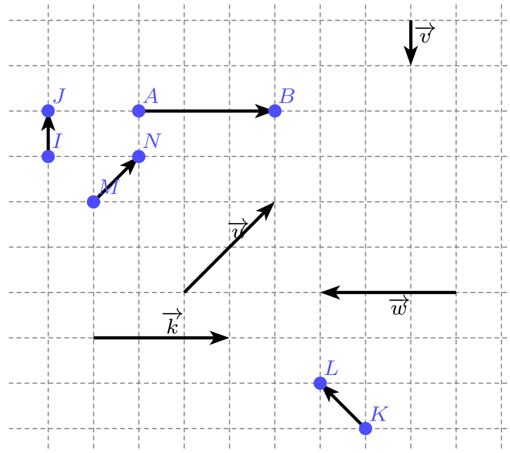


Exemple 4.

① Repérer les vecteurs égaux et les vecteurs de même norme.

② Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$?

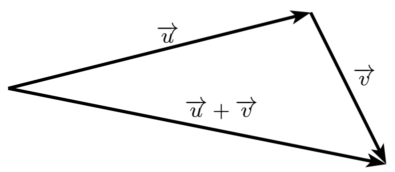
③ Par quelle translation le point A est-il l'image du point B ?



2. Somme de vecteurs

Propriété 4.

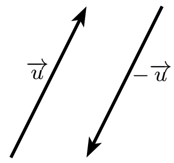
La **somme des vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Remarque 4. L'ordre choisi n'a pas d'influence sur l'enchainement de deux translations. En effet, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.

Propriété 5.

L'**opposé d'un vecteurs** $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur qui a la même direction et la même norme que le vecteur $\overrightarrow{u}$, mais qui a un sens contraire (ou opposé) à $\overrightarrow{u}$.



Remarque 5. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB}$ on a donc $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Propriété 6.

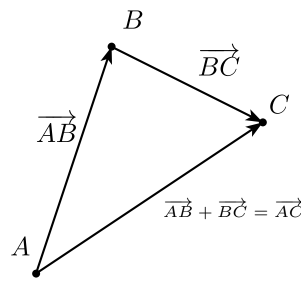
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ (commutativité)
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$

Théorème 7.

Relation de Chalses.
Pour tous A,B,C du plan, on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

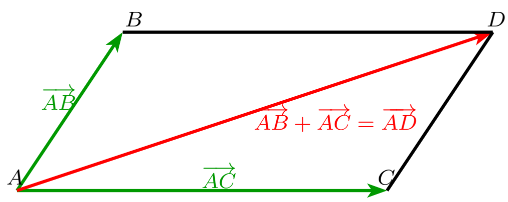
En conséquence, l'enchaînement de deux translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



Exemple 5. Simplifier l'écriture suivante :
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=$

Propriété 8.

Règle du parallélogramme
Le quadrilatère $ABDC$ un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

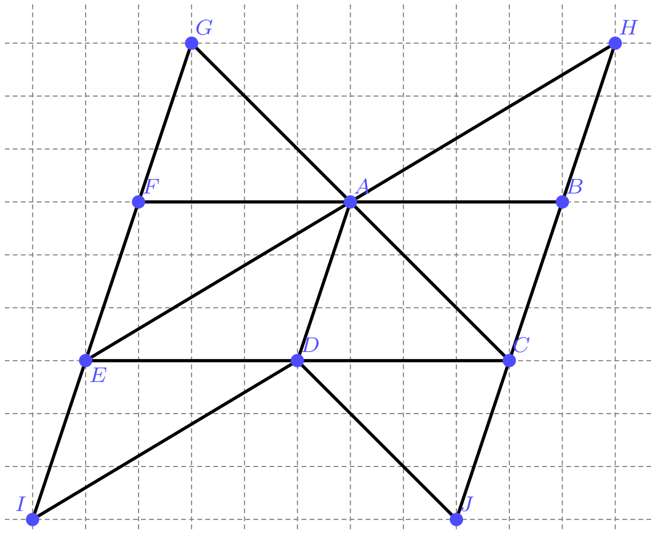


Exemple 6.

① Écrire quatre sommes de vecteurs traduisant la relation de Chasles.

② Écrire quatre sommes de vecteurs traduisant la règle du parallélogramme.

③ Donner l'image des points A et D par la translation de vecteurs $\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{FE}$.



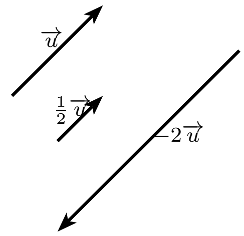
3. Produit d'un vecteur par un nombre réel

3. 1. Le vecteur $k\vec{u}$

Définition 4.
Soit k un réel non nul et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan, alors le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur ayant :

- même direction que $\overrightarrow{u}$,
- même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$,
- $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$;

Si $k = 0$, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.



Propriété 9.

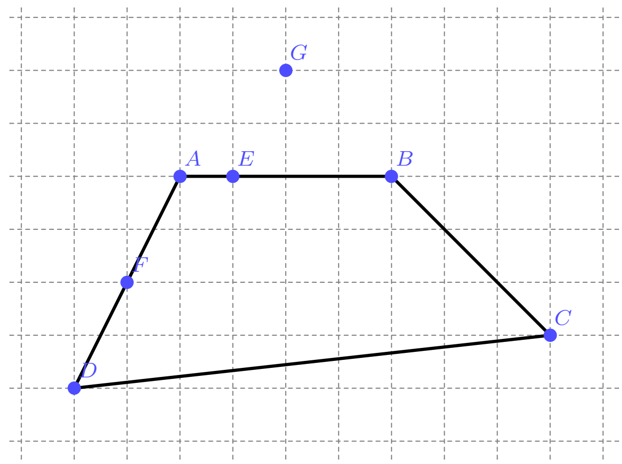
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et tous nombres réels a et b on a :

- $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$
- $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$
- $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$

Exemple 7.

① Placer les points H, I et J tels que :
(a) $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (c) $\overrightarrow{DJ} = \frac{5}{9}\overrightarrow{DC}$

② Compléter
(a) $\overrightarrow{AE} = \quad \overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{DF} = \quad \overrightarrow{DA}$ (c) $\overrightarrow{BG} = \quad \overrightarrow{BC}$



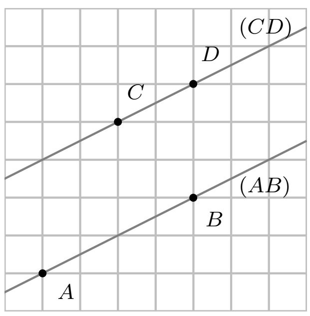
3. 2. Vecteurs colinéaires

Définition 5. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits **colinéaires** si et seulement s'ils ont même direction.
Alors il existe un réel non nul k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque 6. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.

Théorème 10.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**
$\iff$ les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
$\iff$ Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (ou $k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$)



Exemple 8. Soient trois points A, B et C distincts non alignés.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires dans les cas suivants :

① $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = -6\overrightarrow{AB}$ ② $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$ ③ $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v} = 9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

Propriété 11.

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.