

1. NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a et $a + h$ sont deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

1.1. TAUX DE VARIATION

Définition 1.

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et $a + h$ (avec $h \neq 0$) est le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple 1. Soit f la fonction $x \mapsto x^2$. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$.

1.2. NOMBRE DÉRIVÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition 2.

- Dire que la fonction f est dérivable en a signifie que le taux de variation de f entre a et $a + h$ a pour limite un nombre réel lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre réel, lorsqu'il existe est appelé **nombre dérivé de f en a** et il est noté $f'(a)$.

Remarque 1.

Lorsque f est dérivable en a , on a ainsi $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple 2. On reprend la fonction f de l'exemple 1. Calculer $f'(2)$.

1.3. TANGENTE À LA COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION

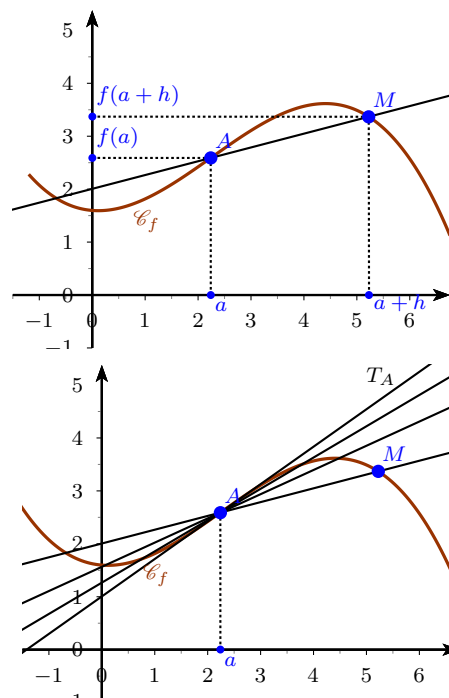
1.3.1 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Dans repère, \mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f .

A et M sont les points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives a et $a + h$ avec $h \neq 0$.

- Le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) .

- Dire que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0, c'est dire que lorsque le point M tend sur la courbe \mathcal{C}_f vers le point A , les droites (AM) tendent vers une « position limite » : celle de la droite T_A passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$. Cette droite semble presque confondue avec la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de A .

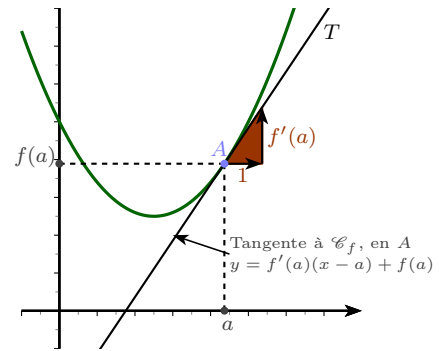


1.32 ÉQUATION DE LA TANGENTE

Définition 3.

Dans un repère, soit f une fonction dérivable en a .

La tangente T à la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété 1.

Dans un repère, l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

♣ **Démonstration 1.** La tangente T à \mathcal{C}_f au point $A(a; f(a))$ a une équation de la forme : $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

Exemple 3. On reprend la fonction f de l'exemple 1 et 2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 2.

2. FONCTIONS DÉRIVÉES

Définition 4.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout nombre réel x de I .

La fonction qui a tout nombre réel x de I associe $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f . Cette fonction est notée f' et elle est définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

2.1. DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

Propriété 2.

Fonction	Fonction f	Fonction dérivée f'	f étant dérivable sur
Constante	$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	0	\mathbb{R}
Identité	$f(x) = x$	1	\mathbb{R}
Affine	$f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$	m	\mathbb{R}
Carrée	$f(x) = x^2$	$2x$	\mathbb{R}
Cube	$f(x) = x^3$	$3x^2$	\mathbb{R}
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$ (avec $x \geq 0$)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

♣ **Démonstration 2.** On suppose que $a \in \mathbb{R}$, $a + h \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$.

Pour $f(x) = x^2$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

♣ **Démonstration 3.** Soit $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. On suppose que $a \in D$, $a + h \in D$ et $h \neq 0$.

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$),

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

Remarque 2.

△ La fonction racine carrée est définie en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

♣ **Démonstration 4.** Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ et $h > 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

2.2. FONCTION DÉRIVÉE DE LA FONCTION $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Propriété 3.

Pour tout entier relatif n , la fonction f définie sur \mathbb{R} (sur \mathbb{R}^* si n est négatif) par $f(x) = x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} (sur \mathbb{R}^* si n est négatif), et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif) $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5$. Calculer la fonction dérivée de f .

Exemple 5. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = \frac{1}{x^7}$. Calculer la fonction dérivée de g .

3. DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

3.1. SOMME ET PRODUIT PAR UN RÉEL

Propriété 4.

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Remarque 3. On peut noter $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple 6. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Propriété 5.

Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un réel et u est dérivable sur un intervalle I , alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \lambda u'(x)$.

Remarque 4. On peut noter $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Exemple 7. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^3$.

Exemple 8. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = -4\sqrt{x}$.

Définition 5.

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une **fonction polynôme** si $f(x)$ peut s'écrire comme somme de termes de la forme kx^n avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

Propriété 6.

Toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur \mathbb{R} .

Exemple 9. Soit la fonction f définie par $f(x) = -4x^5 - 2x^2 + 4x - 9$.

Donner l'ensemble de définition de f . En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée f' .

3.2. PRODUIT, INVERSE ET QUOTIENT

Propriété 7.

Si $f(x) = u(x)v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Remarque 5. On peut noter $(uv)' = u'v + uv'$.

♣ **Démonstration 5.** On suppose que $a \in I$, $a + h \in I$ et $h \neq 0$.

Pour $f(x) = u(x)v(x)$,
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

Exemple 10. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$.

Propriété 8.

- Si $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) \neq 0$ pour tout x de I , alors f est dérivable sur I et $f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$.
- Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $v(x) \neq 0$ pour tout x de I , alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Remarque 6. On peut noter $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 11. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{-3}{2x^2}$.

