

△ Remarque : Des erreurs/coquilles ont pu se glisser dans la rédaction.

1. RÈGLES DE CALCUL

1.1. CALCULER AVEC DES FRACTIONS

Propriété 1.

Pour tous a, b et c réels non-nuls.

① $\frac{a}{1} = a$

Une fraction dont le dénominateur vaut 1 est égale à son numérateur.

② $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$

On ne change pas une fraction en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre.

③ $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Un signe moins en facteur de la fraction peut passer en facteur du numérateur ou du dénominateur.

Propriété 2.

Pour tous a, b, c et d réels non-nuls.

① produit : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ ② inverse : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ ③ division : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

△ On ne peut ajouter, soustraire ou comparer que des fractions de **même** dénominateur :

④ plus : $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$ ⑤ moins : $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$ ⑥ comparer : $\frac{a}{d} < \frac{b}{d} \iff a < b$

✎ EXERCICE 1. Simplifier les expressions suivantes :

① $\frac{3}{5} + \frac{12}{-35} \times \frac{-49}{24}$

② $\frac{124 \times 16 \times 5 \times 6}{12 \times 150 \times 3}$

③ $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{25}}$

④ $\frac{32}{3} - 6$

⑤ $\frac{6 \times 18 \times 30}{5 \times 60 \times 80}$

⑥ $\frac{2}{\frac{-7}{2}}$

⑦ $\frac{7}{3} - \frac{2}{\frac{1}{5}}$

⑧ $\frac{4 \times (\frac{5}{2} - \frac{5}{3})}{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}$

1.2. CALCULER AVEC DES PUISSANCES ET DES RACINES CARRÉES

Propriété 3.

Pour tous a, b réels non-nuls.

Opérations avec un même nombre élevé à différentes puissances :

① $a^n a^m = a^{n+m}$ ② $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ③ $(a^n)^m = a^{nm}$

Opérations avec des nombres différents élevés à la même puissance :

④ $a^n \times b^n = (ab)^n$ ⑤ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

✎ EXERCICE 2. Simplifier les expressions suivantes :

☞ Exemple : $\frac{3^7 \times 2^7}{6^6 \times 6^{-1}} = \frac{(3 \times 2)^7}{6^{6+(-1)}} = \frac{(6)^7}{6^5} = (6)^{7-5} = 6^2 = 36.$

① $\frac{15^{10}}{5^{10}}$

② $\frac{10^5}{(10^2)^{-3} \times 10^{10}}$

③ $\frac{20^6}{4^3}$

④ $\frac{2^{-7} \times 3^{-7}}{6^{-9} \times 6^{+1}}$

⑤ $\frac{(27^2)^4}{3^8}$

Propriété 4.

Pour tous a, b réels positifs,

- ① $\sqrt{a^2} = a$ ② $\sqrt{a^2} = a$ ③ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ④ Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
 ④ Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

✎ EXERCICE 3. Simplifier les expressions suivantes :

- ① $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$ ② $\sqrt{440}$ ③ $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$ ④ $(\sqrt{8} + 5)(\sqrt{8} - 5)$ ⑤ $\frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$

✎ EXERCICE 4. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b des entiers avec b le plus petit possible) :

- ① $2\sqrt{27} - 5\sqrt{3} + \sqrt{48}$ ② $\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 9\sqrt{8}$ ③ $-6\sqrt{5} - 7\sqrt{45} - 4\sqrt{20}$ ④ $-8\sqrt{10} \times 5\sqrt{2}$

2. DÉVELOPPER, FACTORISER

2.1. DÉVELOPPER UNE EXPRESSION

✎ EXERCICE 5. Développer et réduire les expressions

- ① $A = 5(6x - 2) + 2(5y - 2)$ ② $B = (-4x - 5)(4x - 7)$
 ③ $C = 2x(-x - 7)(10x + 5)$ ④ $D = \left(6x - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{6x}{5} + 4\right)$

Propriété 5.**Identités remarquables**

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- ① $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ② $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ③ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

✎ EXERCICE 6. Développer les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

- ① $A = (3x + 1)^2$ ② $B = (7 - x)^2$ ③ $C = (2x - 1)(2x + 1)$ ④ $D = (-4x + 2)(4x + 2)$

✎ EXERCICE 7. Développer et réduire les expressions suivantes :

- ① $A = (x - 7)^2 - (x + 8)(2x - 3)$ ② $B = (10 - 4x)(5 + 3x) - (5x - 6)$ ③ $C = (5x - 4)(5x + 4) - (6x - 3)^2$

2.2. FACTORISER UNE EXPRESSION

✎ EXERCICE 8. Factoriser les expressions

☞ Exemple :

$$\begin{aligned} (2x + 3)(-7x + 3) - (5x - 5)(2x + 3) &= (2x + 3)((-7x + 3) - (5x - 5)) \\ &= (2x + 3)(-7x + 3 - 5x + 5) \\ &= (2x + 3)(-12x + 8) \\ &= 4(2x + 3)(-3x + 2). \end{aligned}$$

- ① $A = (8x - 3)(8 - 7x) + (8x - 3)(-x - 9)$ ② $B = (5x - 9)^2 + (5x + 10)(5x - 9)$
 ③ $C = 6(x + 1)(3x - 2) - 2(2 - 5x)(x + 1)$

✎ EXERCICE 9. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

☞ Exemple : $49x^2 - 9 = (7x)^2 - (3)^2 = (7x - 3)(7x + 3)$.

- ① $A = 16x^2 - 4$ ② $B = 25 - 70x + 49x^2$ ③ $C = 36x^2 + 24x + 4$ ④ $D = (5x - 2)^2 - 16$

✎ EXERCICE 10. Factoriser les expressions suivantes :

① $A = 8x + 4x^2$

② $B = 24x^3 + 12x^2$

③ $C = (x + 8)(3x + 5) - (x - 4)(x + 8)$

④ $D = (x - 3)(2x - 1)^2 + (12 - 4x)$

⑤ $E = 12x^2 - 3 + (2x + 1)^2$

⑥ $F = (2x - 2)^2 - x^2 + 1$

3. RÉOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

3.1. RÉOLUTION ALGÈBRE D'ÉQUATIONS

✎ EXERCICE 11. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

☞ Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, -3x + 9 = 3(-6x - 2) &\iff -3x + 9 = -18x - 6 \\ &\iff -3x + 18x = -6 - 9 \\ &\iff 15x = -15 \\ &\iff x = -1 \\ S &= \{-1\}. \end{aligned}$$

① $7x + 8 = -12x$

② $-35x - 9 = -2$

③ $\frac{x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

④ $3(x + 4) + 5(x - 1) = 0$

⑤ $3x + 2 = x - 6$

⑥ $-4(3x - 8) + 1 = 5(-x - 3) + 6$

✎ EXERCICE 12. Équations

Utiliser les identités remarquables pour résoudre les équations suivantes :

① $x^2 - 16 = 0$

② $2(x + 1)^2 = 18$

③ $(x - 3)^2 = x - 3$

④ $(x - 3)^2 = 25$

⑤ $(2x + 1)^2 - 4 = 12$

Propriété 6.

(1) $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$

(2) $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$

✎ EXERCICE 13. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

☞ Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, (3x - 4)(-x + 5) = 0 &\iff 3x - 4 = 0 \text{ ou } -x + 5 = 0 \\ &\iff 3x = 4 \text{ ou } -x = -5 \\ &\iff x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 5 \\ S &= \left\{ \frac{4}{3}; 5 \right\}. \end{aligned}$$

① $(2x + 3)(-x + 6) = 0$

② $(x + 8)(2x - 1) = 0$

③ $(2 + 5x)(-7x + 9) = 0$

④ $(-4x + 8)(3x - 3) = 0$

⑤ $(x + 2)^2 = 0$

✎ EXERCICE 14. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

☞ Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \frac{2x + 8}{x - 3} = 0 &\iff 2x + 8 = 0 \text{ et } x - 3 \neq 0 \\ &\iff 2x = -8 \text{ et } x \neq 3 \\ &\iff x = \frac{-8}{2} \text{ et } x \neq 3 \\ &\iff x = -4 \text{ et } x \neq 3 \\ \text{or } -4 &\neq 3 \text{ donc } S = \{-4\}. \end{aligned}$$

① $\frac{x - 7}{2x - 4} = 0$

② $\frac{20 - 5x}{3x + 8} = 0$

③ $\frac{1}{x} = 4$

④ $\frac{-2}{5x + 3} = 2$

⑤ $\frac{-7x - 4}{x + 6} = -5$

3.2. RÉOLUTION ALGÈBRE D'INÉQUATIONS

✎ EXERCICE 15. Écriture sous forme d'inégalité

Dans chaque cas, écrire sous forme d'inégalité les intervalles suivants :

☞ Exemple : $x \in]-7; 9] \iff -7 < x \leq 9$.

- ① $x \in [-3; 5]$ ② $x \in]3; 18]$ ③ $x \in]-1; 0[$
 ④ $x \in [-7; +\infty[$ ⑤ $x \in]-\infty; 56]$ ⑥ $x \in]-\infty; -12[$

✎ EXERCICE 16. Écriture sous forme d'intervalle Dans chaque cas, écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres x vérifiant l'inégalité.

☞ Exemple : $x > 8 \iff x \in]8; +\infty[$

- ① $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ② $2 \geq x > 0$ ③ $3 \leq x < 3,5$
 ④ $x > -2$ ⑤ $x \geq -6$ ⑥ $-4 \leq x$

✎ EXERCICE 17. Intersection et réunion d'intervalles Dans chaque cas, déterminer l'intersection (symbole \cap) et la réunion (symbole \cup) des intervalles I et J .

☞ Exemple : $I =]-13; 5]$ et $J = [-5; +\infty[$
 $I \cap J =]-13; 5] \cap [-5; +\infty[= [-5; 5]$
 $I \cup J =]-13; 5] \cup [-5; +\infty[=]-13; +\infty[$

- ① $I = [-8; 8]$ et $J = [-2; 12]$ ② $I =]1; 8]$ et $J = [5; 9]$ ③ $I =]-\infty; 1[$ et $J = [2; 5]$
 ④ $I = [-5; 2]$ et $J =]-1; 10[$ ⑤ $I = [5; +\infty[$ et $J = [-20; 4]$ ⑥ $I =]-\infty; -5[$ et $J = [-9; 3[$

Propriété 7.

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non-nul.

① $a < b \iff a + c < b + c$

ajouter un même nombre réel (positif ou négatif) à chaque membre d'une inégalité la transforme en une inégalité équivalente.

② Si $d > 0$: $a < b \iff a \times d < b \times d$

multiplier par même nombre réel strictement positif chaque membre d'une inégalité la transforme en une inégalité équivalente.

③ Si $d < 0$: $a < b \iff a \times d > b \times d$

multiplier par même nombre réel strictement négatif chaque membre d'une inégalité et **changer son sens** la transforme en une inégalité équivalente.

✎ EXERCICE 18. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

☞ Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, 6x - 5 \leq 3x + 2 &\iff 6x - 3x \leq 2 + 5 \\ &\iff 3x \leq 5 \\ &\iff x \leq \frac{5}{3} \\ S &= \left] -\infty; \frac{5}{3} \right] \end{aligned}$$

- ① $2x - 1 \leq 2$ ② $4x + 7 > 9$ ③ $\frac{1 - 3x}{4} \geq 0$
 ④ $x - 7 < 3x + 3$ ⑤ $6x - 8 \geq -5 + 4x$ ⑥ $\frac{x - 2}{3} - \frac{1 - x}{2} < 0$
 ⑦ $\frac{x}{2} - \frac{4 - x}{x} > 5$ ⑧ $-2x + 4 \leq x - 2(x + 4)$ ⑨ $(x + 1)^2 - 3x < x^2 + 4x - 9$

4. SYSTÈMES LINÉAIRES, INTERSECTIONS DE DROITES

4.1. DÉFINITION, OPÉRATIONS SUR LES SYSTÈMES

Définition 1.

Un **système linéaire de deux équations linéaire à deux inconnues** est la donnée de deux équations d'inconnues x et y de la forme :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E_1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (E_2) \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels donnés.}$$

Une solution de ce système est le couple de valeurs $(x; y)$ qui vérifie simultanément ces deux équations. Résoudre ce système, c'est trouver tous ses couples de solutions.

EXERCICE 19. Systèmes

① Le couple $(-5; 7)$ est-il solution du système $(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -x - 3y = -16 \end{cases}$

② Le couple $(4; -1)$ est-il solution du système $(S_2) : \begin{cases} -x + 7y = -11 \\ 2x - 2y = 11 \end{cases}$

Propriété 8.

Soient les droites d d'équation $ax + by + c = 0$ et d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.

Soit le système : $(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E_1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (E_2) \end{cases}$

Résoudre le système (S) , c'est déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels des droites d et d' . Soient $\vec{u}(-b; a)$ et $\vec{v}(-b'; a')$ les vecteurs directeurs respectifs de d et d' .

On a donc $\det(\vec{u}; \vec{v}) = -b \times a' - a \times (-b') = ab' - a'b$

On distingue 3 possibilités pour l'ensemble des couples solutions \mathcal{S} du système (S) :

$ab' - a'b \neq 0$	$ab' - a'b = 0$	
\vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires	\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires	
d et d' sont sécantes en un point $I(x_I; y_I)$	d et d' sont strictement parallèles	d et d' sont confondues
(S) admet une unique solution $\mathcal{S} = (x_I; y_I)$	(S) n'admet pas de solution $\mathcal{S} = \emptyset$	(S) admet une infinité de solutions

4.2. RÉOLUTION PAR SUBSTITUTION

☞ Exemple :

On isole une inconnue dans une équation. Par exemple, x dans la seconde équation :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x = \boxed{2y} \end{cases}$$

On remplace (ou substitue) x par son expression en fonction de y (ici, $2y$) dans la première équation, afin de faire disparaître la variable x :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times \boxed{2y} - 2y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 2y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Conclusion. Le système (S) admet pour unique solution le couple $(1; \frac{1}{2})$ où $\mathcal{S} = (1; \frac{1}{2})$.

4.3. RÉOLUTION PAR COMBINAISON

☞ Exemple :

On multiplie par exemple la première équation par le coefficient de x dans la seconde et on multiplie la seconde équation par le coefficient de x dans la première :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 1x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times 3x - 1 \times 2y = 1 \times 2 \\ 3 \times x - 3 \times 2y = 3 \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

Les coefficients de x sont identiques, on remplace une équation par la différence des deux :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - (3x - 6y) = 2 - (0) \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 3x - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$$

Conclusion. Le système (S) admet pour unique solution le couple $(1; \frac{1}{2})$ où $\mathcal{S} = (1; \frac{1}{2})$.

☞ EXERCICE 20. Systèmes

① Pour chaque système, discuter de l'existence des solutions.

② Résoudre les systèmes admettant un unique couple de solution.

$$(S_1) : \begin{cases} 6x - 5y = 38 \\ 3x - y = 13 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x - 5y = -7 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ -4x + 3y = -3 \end{cases} \quad (S_4) : \begin{cases} -10x + 9y = 10 \\ 10x + 3y = -8 \end{cases}$$

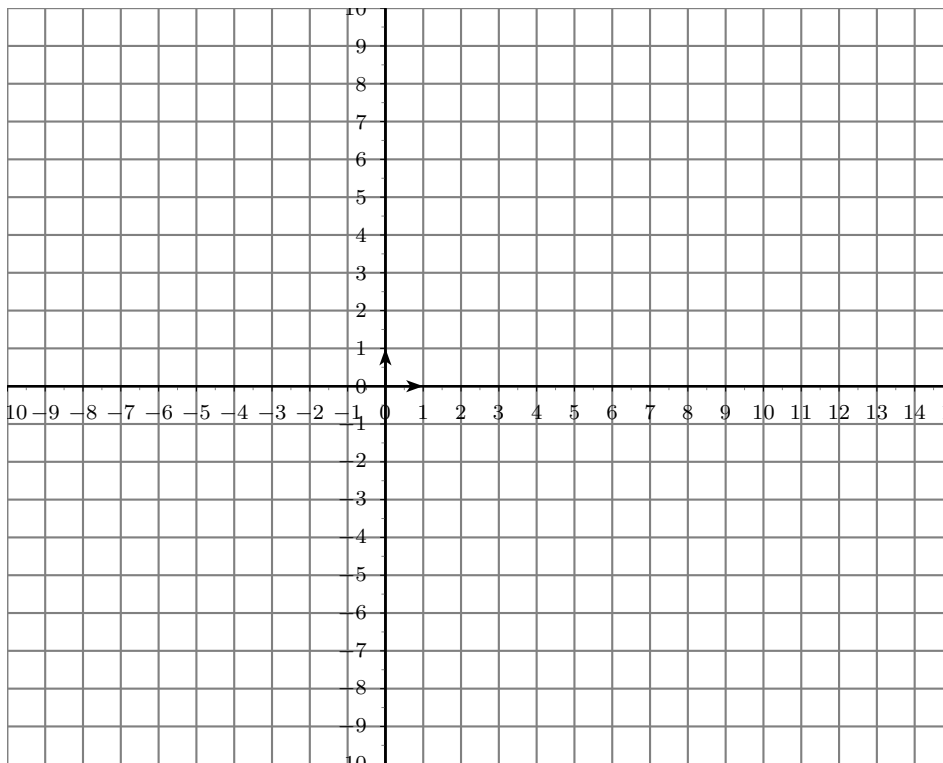
☞ EXERCICE 21. Droites et systèmes Pour chacun des systèmes proposés :

① Représenter dans le repère ci-dessous les droites associées aux deux équations du système ;

② Par lecture graphique, déterminer la solution du système ;

③ Vérifier le résultat par le calcul.

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -x - y = 1 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 3x - y = 8 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 3x - 2y = -33 \end{cases} \quad (S_4) : \begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ x - 3y = -16 \end{cases}$$



5. TABLEAU DE SIGNES

5.1. TABLEAU DE SIGNES DE $mx + p$

Propriété 9.

Soit $m \neq 0$ et $p \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$.

Le signe de $f(x)$ en fonction de x est donné par le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	signe de $-m$		signe de m

✎ EXERCICE 22. Compléter les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
$5 - 2x$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$x - \frac{1}{2}$		

✎ EXERCICE 23.

Déterminer le tableau de signes des deux fonctions suivantes : $f(x) = -3x + 1$ et $g(x) = 2x + 5$.

Solutions

à venir

Toutes les solutions peuvent *facilement* être trouvées à l'aide du logiciel GeoGebra.

Lancer Geogebra \implies *Affichage* \implies *Calcul formel* une fenêtre apparait permettant de saisir les opérations.