Chapitre 12 : Droites et systèmes
Seconde, 2019-2020

Dans ce chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

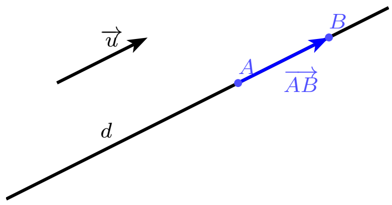
1. Droites et vecteurs directeurs

1.1. Vecteur directeur d'une droite

Définition 1.
On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de d.

Propriété 1.

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d s'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.



Remarque 1. Un vecteur directeur d'une droite ne peut pas être nul car les points A et B sont distincts.

Propriété 2.

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite d, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de d.

Exemple 1. Dans un repère du plan, on donne les points $A(2; -5)$, $B(-4; 10)$ et le vecteur $\vec{u}(-2; 6)$. Le vecteur $\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de la droite (AB) ?

Propriété 3.

Soient d une droite du plan, le point A appartient à d et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d.
Un point M du plan appartient à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AM}) = 0$.

Exemple 2. Soit d la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(4; 2)$ passant par le point $A(-3; -3)$. Montrer que le point $M(11; 4)$ appartient à la droite d.

1.2. Droites parallèles et droites sécantes

Propriété 4.

Soient d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
- Les droites d et d' sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$.
- Les droites d et d' sont **sécantes** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \neq 0$.

Exemple 3. Soit d la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(8; 2)$ et les points $A(2; -3)$, $B(-2; -4)$. Montrer que les droites d et (AB) sont parallèles.

2. Les équations de droites

2. 1. Équation cartésienne d'une droite

Définition 2.
Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d.

Remarque 2. Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes. Ainsi, la droite d d'équation $3x - y + 1 = 0$ a aussi pour équation $6x - 2y + 2 = 0$ ou toute équation équivalente.

Propriété 5.
a, b et c sont des nombres réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
Dire que d admet pour équation $ax + by + c = 0$ signifie qu'un point $M(x_M; y_M)$ appartient à la droite d si, est seulement si, ses coordonnées vérifient cette équation ($ax_M + by_M + c = 0$).

Exemple 4. Soit d la droite du plan d'équation $d : -5x + 3y - 8 = 0$. Le point $A(2; 6)$ appartient-il à d ? Même question pour le point $B(-2; -1)$?

Propriété 6.
Dans un repère du plan, toute droite admettant une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ admet $\vec{u}(-b; a)$ comme **vecteur directeur**.

Exemple 5. Dans un repère du plan, on donne le point $A(2; -5)$ et le vecteur $\vec{u}(-2; 6)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple 6. Dans un repère du plan, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $C\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ et $D(4; -3)$.

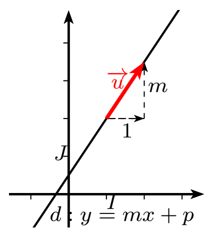
2. 2. Équation réduite d'une droite

Définition 3.
Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une unique équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des nombres réels. Cette équation est **l'équation réduite** de la droite d.

Remarque 3. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées à une unique équation de la forme $x = k$ (où k un nombre réel). Elle n'a ni pente, ni ordonnée à l'origine.

Exemple 7. Soit d la droite d'équation cartésienne $-2x + 4y + 8 = 0$. Donner l'équation réduite de d.

Propriété 7.
Dans un plan muni d'un repère, le vecteur $\overrightarrow{u}(1; m)$ est un **vecteur directeur** de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.



Exemple 8. Soit d la droite d'équation réduite $y = -\frac{1}{3}x - 2$. Donner deux vecteurs directeurs de la droite d.

Exemple 9. Soient d la droite d'équation cartésienne $6x - 4y + 3 = 0$ et d' la droite d'équation réduite $y = \frac{3}{2}x - 5$. Montrer que d et d' sont parallèles.

3. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

3.1. Systèmes d'équations et solutions

Définition 4.
Un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** est la donnée de deux équations d'inconnues x et y de la forme :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E_1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (E_2) \end{cases} \qquad \text{où } a,\ b,\ c,\ a',\ b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels donnés.}$$

Une solution de ce système est le couple de valeurs $(x; y)$ qui vérifie simultanément ces deux équations.
Résoudre ce système, c'est trouver tous ses couples de solutions.

Exemple 10. Le couple $(-5; 7)$ est-il solution du système $(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -x - 3y = -16 \end{cases}$

3.2. Interprétation graphique et nombre de couples de solutions

Propriété 8.

Soient les droites d d'équation $ax + by + c = 0$ et d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.

Soit le système : $\quad (S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E_1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (E_2) \end{cases}$

Résoudre le système (S), c'est déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels des droites d et d'.
Soient $\vec{u}(-b; a)$ et $\vec{v}(-b'; a')$ les vecteurs directeurs respectifs de d et d'.
On a donc $det(\vec{u}; \vec{v}) = -b \times a' - a \times (-b') = ab' - a'b$

On distingue 3 possibilités pour l'ensemble des couples solutions $\mathscr{S}$ du système (S) :

ab'-$a'b \neq 0$	ab'-$a'b = 0$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	
d et d' sont sécantes en un point $I(x_I; y_I)$	d et d' sont strictement parallèles	d et d' sont confondues
(S) admet une unique solution $\mathscr{S} = (x_I; y_I)$	(S) n'admet pas de solution $\mathscr{S} = \varnothing$	(S) admet une infinité de solutions

Exemple 11. Pour chaque système, discuter de l'existence des solutions.

$$(S_1) : \begin{cases} 6x - 5y = 38 \\ 3x - y = 13 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ -4x + 3y = -3 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} -8x + 12y - 4 = 0 \\ 2x + -3y + 1 = 0 \end{cases}$$

3. 3. Méthodes de résolution algébriques d'un système

3.31 Méthode de résolution par substitution

☞ *Exemple :*

On isole une inconnue dans une équation. Par exemple, x dans la seconde équation :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x = \boxed{2y} \end{array} \right.$$

On remplace (ou substitue) x par son expression en fonction de y (ici, $2y$) dans la première équation, afin de faire disparaître la variable x :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \times \boxed{2y} - 2y = 2 \\ x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y - 2y = 2 \\ x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y = 2 \\ x = 2y \end{array} \right.$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Conclusion. Le système (S) admet pour unique solution le couple $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ où $\mathscr{S} = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

3.32 Méthode de résolution par combinaison

☞ *Exemple :*

On multiplie par exemple la première équation par le coefficient de x dans la seconde et on multiplie la seconde équation par le coefficient de x dans la première :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 1x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \times 3x - 1 \times 2y = 1 \times 2 \\ 3 \times \ x - 3 \times 2y = 3 \times 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{array} \right.$$

Les coefficients de x sont identiques, on remplace une équation par la différence des deux :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y - (3x - 6y) = 2 - (0) \\ 3x - 6y = 0 \end{array} \right.$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 3x - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ 3x - 3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{3} = 1 \end{array} \right.$$

Conclusion. Le système (S) admet pour unique solution le couple $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ où $\mathscr{S} = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Exemple 12. Après avoir discuté de l'existence des solutions, résoudre les systèmes admettant un unique couple solution.

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} 6x - 5y = 38 \\ 3x - y = 13 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = -2 \\ 2x - 5y = -7 \end{array} \right.$$