Chapitre 9 : Géométrie repérée
1^re^-Spécialité mathématiques, 2019-2020

Dans ce chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

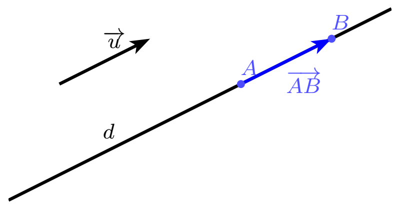
1. Rappels de seconde

1. 1. Vecteur directeur d'une droite

Définition 1.
On appelle vecteur directeur d'une droite d tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de d.

Propriété 1.

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d s'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.



Remarque 1. Un vecteur directeur d'une droite ne peut pas être nul car les points A et B sont distincts.

Propriété 2.

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite d, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de d.

Exemple 1. Dans un repère du plan, on donne les points $A(2;-5)$, $B(-4;10)$ et le vecteur $\vec{u}(-2;6)$. Le vecteur $\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de la droite (AB) ?

Propriété 3.

Soient d une droite du plan, le point A appartient à d et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d.
Un point M du plan appartient à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM}) = 0$.

Exemple 2. Soit d la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(4;2)$ passant par le point $A(-3;-3)$. Montrer que le point $M(11;4)$ appartient à la droite d.

1. 2. Équation cartésienne d'une droite

Définition 2.
Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d.

Remarque 2.
Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes. Ainsi, la droite d d'équation $3x - y + 1 = 0$ a aussi pour équation $6x - 2y + 2 = 0$ ou toute équation équivalente.

Propriété 4.

a, b et c sont des nombres réels avec $(a;b) \neq (0;0)$.
Dire que d admet pour équation $ax+by+c=0$ signifie qu'un point $M(x_M;y_M)$ appartient à la droite d si, est seulement si, ses coordonnées vérifient cette équation $(ax_M+by_M+c=0)$.

Exemple 3. Soit d la droite du plan d'équation $d : -5x+3y-8=0$. Le point $A(2;6)$ appartient-il à d ? Même question pour le point $B(-2;-1)$?

Propriété 5.

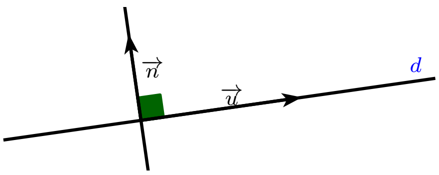
Dans un repère du plan, toute droite admettant une équation de la forme : $ax+by+c=0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$ admet $\vec{u}(-b;a)$ comme **vecteur directeur**.

Exemple 4. Dans un repère du plan, on donne le point $A(2;-5)$ et le vecteur $\vec{u}(-2;6)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple 5. Dans un repère du plan, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $C(-2;\frac{1}{2})$ et $D(4;-3)$.

2. Vecteur normal à une droite

Définition 3.
Dire qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est un **vecteur normal** à une droite d signifie que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite d.



Conséquences :

- Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, elles admettent des vecteurs normaux orthogonaux.
- Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Propriété 6.

Soit d la droite passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Un point M appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Remarque 3. La droite d est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Exemple 6. Soit d la droite passant par le point $A(2;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-4;6)$.
Le point $B(-4;-3)$ appartient-il à la droite d ?

Exemple 7. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2;4)$, $B(1;5)$ et $C(-3;-1)$. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur h issue de B dans le triangle ABC.

Propriété 7.

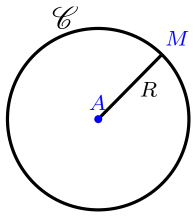
Soient a, b et c des réels avec $(a;b) \neq (0;0)$.
Une droite d a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ si et seulement si $\overrightarrow{n}(a;b)$ est un vecteur normal à d.

Exemple 8. On considère les droites d et d' d'équations respectives $6x-2y-2=0$ et $y=3x-3$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacune de ces droites. Ces droites sont-elles parallèles ?

3. Équation d'un cercle

Propriété 8.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R.
Une **équation cartésienne du cercle** $\mathscr{C}$ est $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.



Démonstration 1.

Exemple 9. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(-4;2)$ qui passe par le point $B(2;-1)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$, puis une équation cartésienne de la tangente T en B au cercle $\mathscr{C}$.