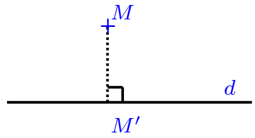
**Chapitre 8 : Calcul vectoriel et produit scalaire**
1re-Spécialité mathématiques, 2019-2020

# 1. Produit scalaire dans le plan

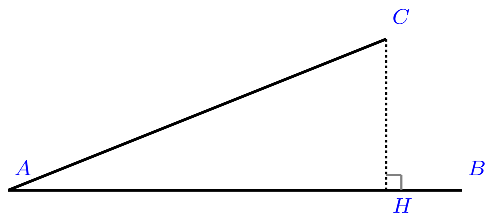
## 1.1. Définitions et propriétés

**Définition 1.**
Le projeté orthogonal d'un point $M$ sur une droite $d$ est le point d'intersection $M'$ de la droite $d$ et de la perpendiculaire à $d$ passant par $M$.

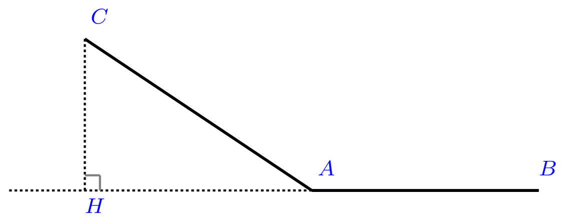



**Définition 2.** Soit $A$, $B$ et $C$ trois points du plan avec $A \neq B$ et $A \neq C$.
Si $H$ est le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$, alors le **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ est défini par **projection orthogonale** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$




$H$ appartient à la demi-droite $[AB)$ :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$.



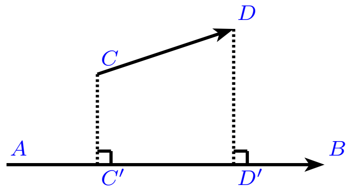

$H$ n'appartient pas à la demi-droite $[AB)$ :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$.

**Remarque 1.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ se lit « $\overrightarrow{AB}$ scalaire $\overrightarrow{AC}$ ».

**Remarque 2.** Le produit scalaire a pour résultat un nombre réel.

**Propriété 1.**

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non nuls, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ où $C'$ et $D'$ sont les projetés orthogonaux respectifs de $C$ et $D$ sur la droite $(AB)$.




**Exemple 1.** On considère un rectangle $ABCD$ de centre $O$ tel que $AB = 3$ et $AD = 6$.
Calculer les produits scalaires suivants :

① $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

② $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

③ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

④ $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{BC}$

⑤ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$

⑥ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

**Propriété 2.**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

**Remarque 3.** Lorsque l'un au moins des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
⚠La réciproque est fausse : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'implique pas nécessairement $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ (cf. vecteurs orthogonaux 1.2).

**Remarque 4.** Le nombre $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$.

**Exemple 2.** Le triangle $ABC$ est équilatéral de côté 8. Le point $D$ est le milieu du segment $[AB]$.Calculer les produits scalaires suivants :

① $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ② $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ③ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ ④ $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$

### 1.2. Produit scalaire et orthogonalité

**Définition 3.**
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires. On note souvent $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété 3.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$).

### 1.3. Règles de calcul

Propriété 4.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et tout nombre réel $\lambda$,

- Commutativité (ou symétrie) : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (1)
- Distributivité : $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (2)
- Linéarité : $(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ (3)

**Remarque 5.** On dit que le produit scalaire est **bilinéaire** (propriétés (2) et (3)).

**Exemple 3.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan tels que : $AB = 3$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$
Calculer les expressions suivantes :

① $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ ② $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}$ ③ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ ④ $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2$

## 2. D'autres expressions du produit scalaire

### 2.1. Produit scalaire avec les coordonnées

Propriété 5.

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$, on a :

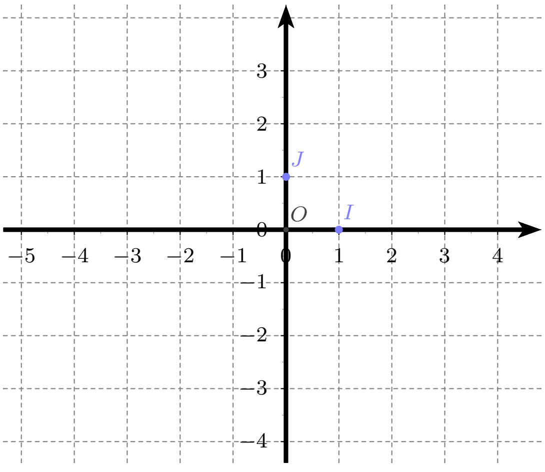
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

**Exemple 4.** On considère les vecteurs $\vec{u}(5; -3)$ et $\vec{v}(1; -4)$ ainsi que les points $A(3; 6)$ et $B(-1; 3)$. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$.

**Propriété 6.**

**Critère d'orthogonalité**
Dans un repère orthonormé, deux les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ ce qui se traduit par $xx'+yy'=0$

**Exemple 5.** Soient $A(-2;-3)$, $B(1;1)$, $C(-3;-1)$, $D(-4;2)$, $E(-1;-3)$ et $F(2;-1)$ des points du repère orthonormé ci-dessous. Les droites $(CA)$ et $(CB)$ sont-elles perpendiculaires ? Le triangle $FDE$ est-il rectangle en $E$ ?




**Propriété 7.**

Pour tous vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a :
(1) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ soit $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2=||\overrightarrow{u}||^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+||\overrightarrow{v}||^2$
(2) $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ soit $||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2=||\overrightarrow{u}||^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+||\overrightarrow{v}||^2$
(3) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2=||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2$

**Exemple 6.** Dans un repère orthonormé, soient les points $A(-2;4)$, $B(5;-1)$ et $C(3;2)$. Calculer $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{BC}||$ puis $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})^2$.

## 2. 2. Produit scalaire avec les normes

**Propriété 8.**

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2+||\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$$

**Démonstration 1.** (Utiliser une identité remarquable)

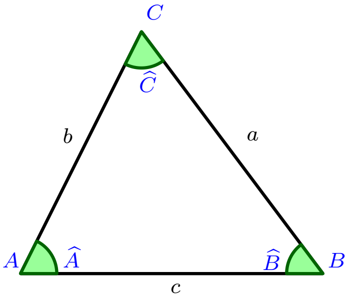
# 3. Applications du produit scalaire

## 3.1. Formules d'Al-Kashi

Théorème 9.

**Théorème d'Al-Kashi ou Pythagore généralisé**
Dans un triangle $ABC$, on pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ alors :

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.
(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$.
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.




**Remarque 6.** « Résoudre un triangle », c'est déterminer tous les côtés et les angles du triangle.

♣ **Démonstration 2.**

## 3.2. Étude d'un ensemble de points

Théorème 10.

**Théorème de la médiane**
Soit $ABC$ un triangle et $I$ est le milieu de $[AB]$, on a :

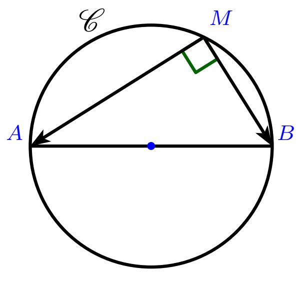
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

**Démonstration 3.**

## 3.3. Caractérisation d'un cercle

Propriété 11.

Un point $M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.




♣ **Démonstration 4.**

**Exemple 7.** On donne les points $A(3;7)$ et $B(-4;5)$. Pour tout point $M(x;y)$ exprimer le produire scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, en déduire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.