Petit manuel de calculs algébriques
1re-Spécialité mathématiques, www.maths-lycee.net

Version : 11 avril 2020

⚠ *Remarque : Des erreurs/coquilles ont pu se glisser dans la rédaction.*

1. RÈGLES DE CALCUL

1.1. Calculer avec des fractions

Propriété 1.

Pour tous a, b et c réels non-nuls.

① $\dfrac{a}{1} = a$ — Une fraction dont le dénominateur vaut 1 est égale à son numérateur.

② $\dfrac{a\times\mathbf{c}}{b\times\mathbf{c}} = \dfrac{a}{b}$ — On ne change pas une fraction en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre.

③ $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ — Un signe moins en facteur de la fraction peut passer en facteur du numérateur ou du dénominateur.

Propriété 2.

Pour tous a, b, c et d réels non-nuls.

① produit : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$ ② inverse : $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$ ③ division : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

⚠ On ne peut ajouter, soustraire ou comparer que des fractions de **même** dénominateur :

④ plus : $\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a+b}{d}$ ⑤ moins : $\dfrac{a}{d} - \dfrac{b}{d} = \dfrac{a-b}{d}$ ⑥ comparer : $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{d} \iff a < b$

✍ Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

① $\dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{-35} \times \dfrac{-49}{24}$ ② $\dfrac{124 \times 16 \times 5 \times 6}{12 \times 150 \times 3}$ ③ $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{25}}$ ④ $\dfrac{32}{3} - 6$

⑤ $\dfrac{6 \times 18 \times 30}{5 \times 60 \times 80}$ ⑥ $\dfrac{2}{\frac{-7}{2}}$ ⑦ $\dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{\frac{1}{5}}$ ⑧ $\dfrac{4 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right)}{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}$

1.2. Calculer avec des puissances et des racines carrées

Propriété 3.

Pour tous a, b réels non-nuls.

Opérations avec un même nombre élevé à différentes puissances :

① $a^n a^m = a^{n+m}$ ② $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ③ $(a^n)^m = a^{nm}$

Opérations avec des nombres différents élevés à la même puissance :

④ $a^n \times b^n = (ab)^n$ ⑤ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

✍ Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

☞ *Exemple :* $\dfrac{3^7 \times 2^7}{6^6 \times 6^{-1}} = \dfrac{(3 \times 2)^7}{6^{6+(-1)}} = \dfrac{(6)^7}{6^5} = (6)^{7-5} = 6^2 = 36.$

① $\dfrac{15^{10}}{5^{10}}$ ② $\dfrac{10^5}{(10^2)^{-3} \times 10^{10}}$ ③ $\dfrac{20^6}{4^3}$ ④ $\dfrac{2^{-7} \times 3^{-7}}{6^{-9} \times 6^{+1}}$ ⑤ $\dfrac{(27^2)^4}{3^8}$

Propriété 4.

Pour tous a, b réels positifs,

① $\sqrt{a}^2 = a$ ② $\sqrt{a^2} = a$ ③ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ④ Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

④ Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

✍ Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes :

① $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$ ② $\sqrt{440}$ ③ $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$ ④ $(\sqrt{8}+5)(\sqrt{8}-5)$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$

✍ Exercice 4. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b des entiers avec b le plus petit possible) :
① $2\sqrt{27} - 5\sqrt{3} + \sqrt{48}$ ② $\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 9\sqrt{8}$ ③ $-6\sqrt{5} - 7\sqrt{45} - 4\sqrt{20}$ ④ $-8\sqrt{10} \times 5\sqrt{2}$

2. Développer, factoriser

2. 1. Développer une expression

✍ Exercice 5. Développer et réduire les expressions
① $A = 5(6x-2) + 2(5y-2)$ ② $B = (-4x-5)(4x-7)$

③ $C = 2x(-x-7)(10x+5)$ ④ $D = \left(6x - \dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{6x}{5} + 4\right)$

Propriété 5.

Identités remarquables
Pour tous nombres réels a et b, on a :
① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

✍ Exercice 6. Développer les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :
① $A = (3x+1)^2$ ② $B = (7-x)^2$ ③ $C = (2x-1)(2x+1)$ ④ $D = (-4x+2)(4x+2)$

✍ Exercice 7. Développer et réduire les expressions suivantes :
① $A = (x-7)^2 - (x+8)(2x-3)$ ② $B = (10-4x)(5+3x) - (5x-6)$ ③ $C = (5x-4)(5x+4) - (6x-3)^2$

2. 2. Factoriser une expression

✍ Exercice 8. Factoriser les expressions

☞ *Exemple :*
$$\begin{aligned}(2x+3)(-7x+3) - (5x-5)(2x+3) &= (2x+3)((-7x+3) - (5x-5))\\ &= (2x+3)(-7x+3-5x+5)\\ &= (2x+3)(-12x+8)\\ &= 4(2x+3)(-3x+2).\end{aligned}$$

① $A = (8x-3)(8-7x) + (8x-3)(-x-9)$ ② $B = (5x-9)^2 + (5x+10)(5x-9)$
③ $C = 6(x+1)(3x-2) - 2(2-5x)(x+1)$

✍ Exercice 9. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

☞ *Exemple :* $49x^2 - 9 = (7x)^2 - (3)^2 = (7x-3)(7x+3)$.

① $A = 16x^2 - 4$ ② $B = 25 - 70x + 49x^2$ ③ $C = 36x^2 + 24x + 4$ ④ $D = (5x-2)^2 - 16$

✍ Exercice 10. Factoriser les expressions suivantes :

① $A = 8x + 4x^2$ ② $B = 24x^3 + 12x^2$ ③ $C = (x+8)(3x+5) - (x-4)(x+8)$

④ $D = (x-3)(2x-1)^2 + (12-4x)$ ⑤ $E = 12x^2 - 3 + (2x+1)^2$ ⑥ $F = (2x-2)^2 - x^2 + 1$

3. Résolution d'équations et d'inéquations

3. 1. Résolution algébrique d'équations

✍ Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

☞ *Exemple :*

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ -3x+9 = 3(-6x-2) &\iff -3x+9 = -18x-6 \\ &\iff -3x+18x = -6-9 \\ &\iff 15x = -15 \\ &\iff x = \frac{-15}{15} \\ &\iff x = -1 \\ S = \{-1\}. \end{aligned}$$

① $7x + 8 = -12x$ ② $-35x - 9 = -2$ ③ $\dfrac{x}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

④ $3(x+4) + 5(x-1) = 0$ ⑤ $(2x+3)(-x+6) = 0$ ⑥ $3x + 2 = x - 6$

⑦ $(x+8)(2x-1) = 0$ ⑧ $(x+2)^2 = 0$ ⑨ $-4(3x-8) + 1 = 5(-x-3) + 6$

✍ Exercice 12. Équations

Utiliser les identités remarquables pour résoudre les équations suivantes :

① $x^2 - 16 = 0$ ② $2(x+1)^2 = 18$ ③ $(x-3)^2 = x - 3$ ④ $(x-3)^2 = 25$ ⑤ $(2x+1)^2 - 4 = 12$

3. 2. Résolution algébrique d'inéquations

✍ Exercice 13. Écriture sous forme d'inégalité

Dans chaque cas, écrire sous forme d'inégalité les intervalles suivants :

☞ *Exemple :* $x \in]-7;9] \iff -7 < x \leqslant 9.$

① $x \in [-3;5]$ ② $x \in]3;18]$ ③ $x \in]-1;0[$

④ $x \in [-7;+\infty[$ ⑤ $x \in]-\infty;56]$ ⑥ $x \in]-\infty;-12[$

✍ Exercice 14. Écriture sous forme d'intervalle Dans chaque cas, écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres x vérifiant l'inégalité.

☞ *Exemple :* $x > 8 \iff x \in]8;+\infty[$

① $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ② $2 \geqslant x > 0$ ③ $3 \leq x < 3,5$

④ $x > -2$ ⑤ $x \geqslant -6$ ⑥ $-4 \leq x$

✍ Exercice 15. Intersection et réunion d'intervalles Dans chaque cas, déterminer l'intersection (symbole $\cap$) et la réunion (symbole $\cup$) des intervalles I et J.

☞ *Exemple :* $I =]-13;5]$ et $J = [-5;+\infty[$

$I \cap J =]-13;5] \cap [-5;+\infty[= [-5;5]$

$I \cup J =]-13;5] \cup [-5;+\infty[=]-13;+\infty[$

① $I = [-8;8]$ et $J = [-2;12]$ ② $I =]1;8]$ et $J = [5;9]$ ③ $I =]-\infty;1[$ et $J = [2;5]$

④ $I = [-5;2]$ et $J =]-1;10[$ ⑤ $I = [5;+\infty[$ et $J = [-20;4]$ ⑥ $I =]-\infty;-5[$ et $J = [-9;3[$

✍ EXERCICE 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

☞ *Exemple :*

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ 6x-5 \leqslant 3x+2 &\iff 6x-3x \leqslant 2+5 \\ &\iff 3x \leqslant 5 \\ &\iff x \leqslant \frac{5}{3} \\ S &= \left]-\infty; \frac{5}{3}\right] \end{aligned}$$

① $2x-1 \leqslant 2$ ② $4x+7>9$ ③ $\dfrac{1-3x}{4} \geqslant 0$

④ $x-7<3x+3$ ⑤ $6x-8 \geqslant -5+4x$ ⑥ $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{1-x}{2} < 0$

⑦ $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4-x}{x} > 5$ ⑧ $-2x+4 \leqslant x-2(x+4)$ ⑨ $(x+1)^2-3x<x^2+4x-9$

4. Systèmes linéaires, intersections de droites

4. 1. Définition, opérations sur les systèmes

Définition 1.
Un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** est la donnée de deux équations d'inconnues x et y de la forme :

$$(S) : \begin{cases} ax+by+c=0 & (E_1) \\ a'x+b'y+c'=0 & (E_2) \end{cases}$$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés.

Une solution de ce système est le couple de valeurs $(x; y)$ qui vérifie simultanément ces deux équations.
Résoudre ce système, c'est trouver tous ses couples de solutions.

✍ EXERCICE 17. Systèmes

① Le couple $(-5; 7)$ est-il solution du système $(S_1) : \begin{cases} 2x+3y=11 \\ -x-3y=-16 \end{cases}$

② Le couple $(4; -1)$ est-il solution du système $(S_2) : \begin{cases} -x+7y=-11 \\ 2x-2y=11 \end{cases}$

Propriété 6.

Soient les droites d d'équation $ax+by+c=0$ et d' d'équation $a'x+b'y+c'=0$.

Soit le système : $(S) : \begin{cases} ax+by+c=0 & (E_1) \\ a'x+b'y+c'=0 & (E_2) \end{cases}$

Résoudre le système (S), c'est déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels des droites d et d'.
Soient $\vec{u}(-b; a)$ et $\vec{v}(-b'; a')$ les vecteurs directeurs respectifs de d et d'.
On a donc $det(\vec{u}; \vec{v}) = -b \times a' - a \times (-b') = ab' - a'b$

On distingue 3 possibilités pour l'ensemble des couples solutions $\mathscr{S}$ du système (S) :

ab'-$a'b \neq 0$	ab'-$a'b = 0$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	
d et d' sont sécantes en un point $I(x_I; y_I)$	d et d' sont strictement parallèles	d et d' sont confondues
(S) admet une unique solution $\mathscr{S} = (x_I; y_I)$	(S) n'admet pas de solution $\mathscr{S} = \varnothing$	(S) admet une infinité de solutions

4.2. Résolution par substitution

☞ *Exemple :*

On isole une inconnue dans une équation. Par exemple, x dans la seconde équation :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ x-2y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ x=\boxed{2y} \end{array}\right.$$

On remplace (ou substitue) x par son expression en fonction de y (ici, $2y$) dans la première équation, afin de faire disparaître la variable x :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\times\boxed{2y}-2y=2 \\ x=2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6y-2y=2 \\ x=2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y=2 \\ x=2y \end{array}\right.$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ x=2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ x=2\times\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Conclusion. Le système (S) admet pour unique solution le couple $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ où $\mathscr{S}=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

4.3. Résolution par combinaison

☞ *Exemple :*

On multiplie par exemple la première équation par le coefficient de x dans la seconde et on multiplie la seconde équation par le coefficient de x dans la première :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ 1x-2y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1\times 3x-1\times 2y=1\times 2 \\ 3\times\ \ x-3\times 2y=3\times 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ 3x-6y=0 \end{array}\right.$$

Les coefficients de x sont identiques, on remplace une équation par la différence des deux :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ 3x-6y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y-(3x-6y)=2-(0) \\ 3x-6y=0 \end{array}\right.$$

On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y=2 \\ 3x-6y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ 3x-6\times\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ 3x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{3}=1 \end{array}\right.$$

Conclusion. Le système (S) admet pour unique solution le couple $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ où $\mathscr{S}=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

✍ Exercice 18. Systèmes

① Pour chaque système, discuter de l'existence des solutions.

② Résoudre les systèmes admettant un unique couple solution.

$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} 6x-5y=38 \\ 3x-y=13 \end{array}\right.$ $(S_2) : \left\{\begin{array}{l} 2x-3y=-2 \\ 2x-5y=-7 \end{array}\right.$ $(S_3) : \left\{\begin{array}{l} 8x-6y=1 \\ -4x+3y=-3 \end{array}\right.$ $(S_4) : \left\{\begin{array}{l} -10x+9y=10 \\ 10x+3y=-8 \end{array}\right.$

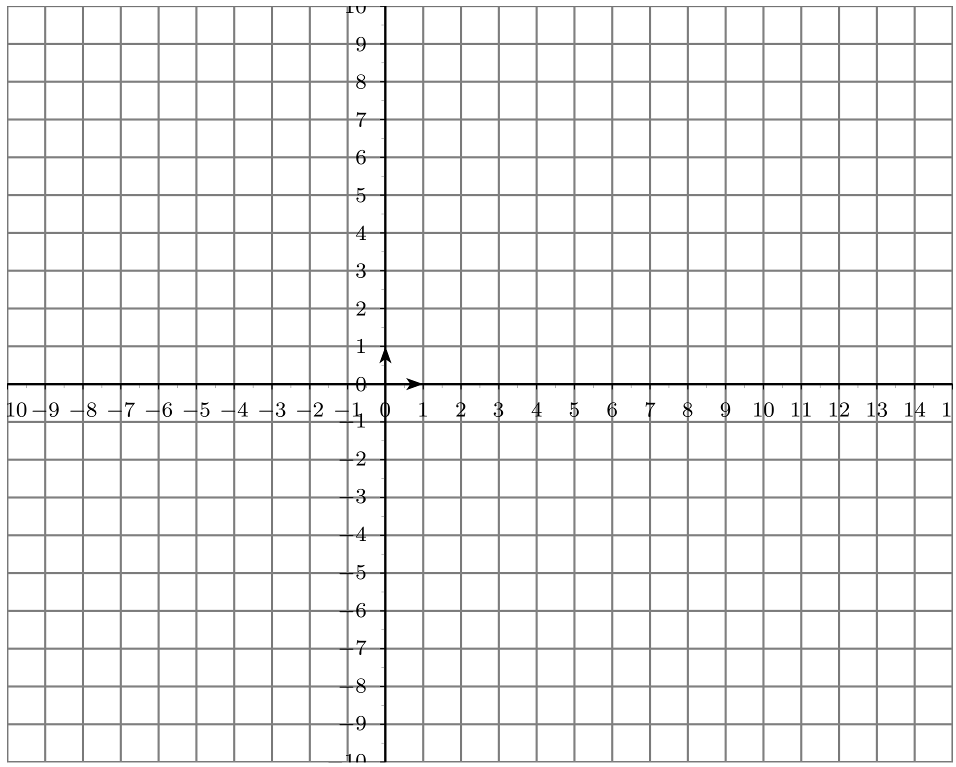
✍ Exercice 19. Droites et systèmes Pour chacun des systèmes proposés :

① Représenter dans le repère ci-dessous les droites associées aux deux équations du système ;

② Par lecture graphique, déterminer la solution du système ;

③ Vérifier le résultat par le calcul.

$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=7 \\ -x-y=1 \end{array}\right.$ $(S_2) : \left\{\begin{array}{l} 3x-y=8 \\ 5x-2y=13 \end{array}\right.$ $(S_3) : \left\{\begin{array}{l} 3x+5y=9 \\ 3x-2y=-33 \end{array}\right.$ $(S_4) : \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=-6 \\ x-3y=-16 \end{array}\right.$



5. Tableau de signes

5.1. Tableau de signes de $mx+p$

Propriété 7.

Soit $m \neq 0$ et $p \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Le signe de $f(x)$ en fonction de x est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-m$	0	signe de m	

✍ Exercice 20. Compléter les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
$5-2x$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$x-\frac{1}{2}$		

✍ Exercice 21.
Déterminer le tableau de signes des deux fonctions suivantes : $f(x) = -3x+1$ et $g(x) = 2x+5$.

5. 2. Résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signes

5.21 Résolution d'une inéquation produit

☞ *Exemple :* Résolution de $(2x-7)(3-x) < 0$.
On résout d'abord $f(x) = 0 \iff (2x-7)(3-x) = 0 \iff 2x-7 = 0$ ou $3-x = 0 \iff x = \frac{7}{2}$ ou $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x - 7$		$-$ - signe de 2		$-$ - signe de 2	0	$+$ signe de 2	
$3 - x$		$+$ - signe de -1	0	$-$ signe de -1		$-$ signe de -1	
Signe de $(2x-7)\times(3-x)$		$-$ $\ominus \times \oplus$	0	$+$ $\ominus \times \ominus$	0	$-$ $\ominus \times \oplus$	

Une fois le tableau de signes dressé, on peut résoudre d'inéquations : on note l'ensemble des x pour lesquels l'expression est de signe « $-$ » : $(2x-7)(3-x) < 0 \iff x \in]-\infty; 3[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$.

✍ Exercice 22. Inéquations produits
Résoudre les inéquations suivantes au moyen d'un tableau de signes :
① $x^2 < 9$ ② $(3x+2)(x-1)x > 0$. ③ $(x-1)(2-3x)x \leqslant 0$
④ $(3x+1)(5x+2) > 6x^2 + 2x$ ⑤ $4x^2 > 16$ ⑥ $3x^2 + 8x + 1 < -x^2$

5.22 Résolution d'une inéquation quotient

☞ *Exemple :* Résolution de $\dfrac{1+x}{4-3x} \geqslant 0$.
D'abord on cherche d'éventuelles **valeurs interdites** : $4-3x = 0 \iff -3x = -4 \iff x = \dfrac{4}{3}$.
Donc $\dfrac{4}{3}$ est une valeur interdite.
Puis on résout $1 + x = 0 \iff x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$1 + x$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$4 - 3x$		$+$		$+$	||	$-$	
Signe de $\dfrac{1+x}{4-3x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

D'après le tableau de signes on a : $\dfrac{1+x}{4-3x} \geqslant 0 \iff x \in [-1; \dfrac{4}{3}[$

✍ Exercice 23. Inéquations quotients
Résoudre les inéquations suivantes au moyen d'un tableau de signes :
① $-\dfrac{6}{3+x} \geqslant 0$ ② $\dfrac{5x}{-2x+8} > 0$ ③ $\dfrac{4x-2}{3x+9} < 0$ ④ $\dfrac{(x+2)(4x-8)}{-x+7} \leqslant 0$
⑤ $\dfrac{(2x+6)^2}{5x+3} > 0$ ⑥ $\dfrac{16x-1}{9+x} \geqslant 0$ ⑦ $\dfrac{x-3}{(-x+7)(4x+5)} \leqslant 0$ ⑧ $\dfrac{9x^2-12x+4}{(3x-6)(-x+3)} < 0$

✍ Exercice 24.
① Montrer que l'inéquation $\dfrac{8-2x}{3x-4} \geqslant -4x-2$ équivaut à l'inéquation $\dfrac{12x(x-1)}{3x-4} \geqslant 0$.
② Dresser le tableau de signes de $\dfrac{12x(x-1)}{3x-4} \geqslant 0$ puis résoudre $\dfrac{8-2x}{3x-4} \geqslant -4x-2$.

Solutions

à venir

Toutes les solutions peuvent *facilement* être trouvées à l'aide du logiciel GeoGebra.

Lancer Geogebra $\Longrightarrow$ *Affichage* $\Longrightarrow$ *Calcul formel* une fenêtre apparait permettant de saisir les opérations.