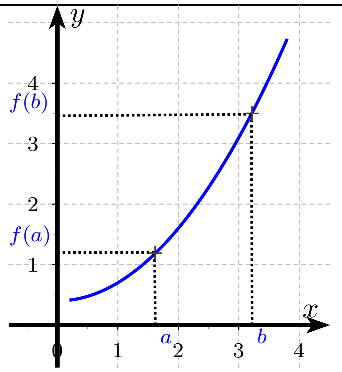
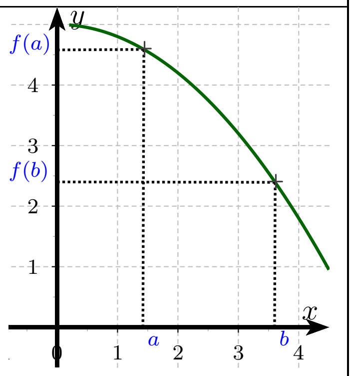
1. Variations d'une fonction

1. 1. Fonction croissante, décroissante

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est **croissante** sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
- On dit que f est **décroissante** sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.

Fonction croissante sur I	Fonction décroissante sur I
	
$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ f conserve l'ordre	$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$ f inverse l'ordre

Remarque 1. Si, sur un intervalle I, la fonction f garde la même valeur, on dit que f est constante sur I.

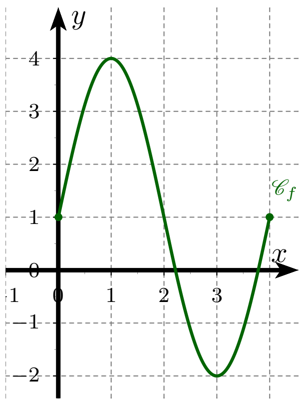
1. 2. Monotonie d'une fonction

Définition 2. Si f ne change pas de variation sur I, on dit que f est **monotone** sur I.

Remarque 2. Si, sur un intervalle I, f est croissante (respectivement décroissante) sans être constante sur une partie de I, on dit que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

1. 3. Tableau de variations

Exemple 1. ✎ A l'aide de la représentation graphique ci-dessous, compléter le tableau de variations de f.



x	
Variations de f	

Exemple 2. On donne ci-contre, le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-2; 10]$.
Comparer :

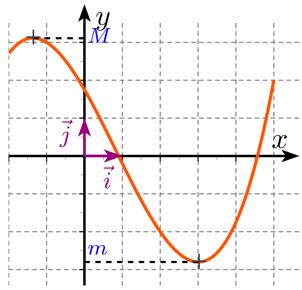
① $g(5)$ et $g(7)$ ② $g(-1)$ et $g(3)$ ③ $g(0)$ et $g(9)$

x	-2		4		8		10
Variations de g	3	↗	5	↘	-8	↗	3

2. Extremums d'une fonction

2. 1. Maximum, minimum d'une fonction

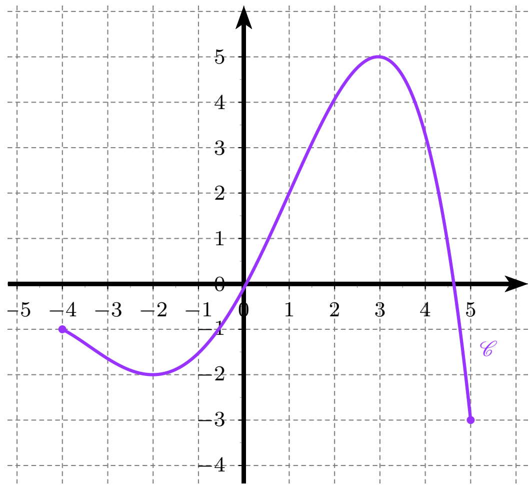
Définition 3.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
• On dit que f admet un **maximum** M sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$.
Autrement dit, M est la plus grande image par f sur I.
• On dit que f admet un **minimum** m sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant m$.
Autrement dit, m est la plus petite image par f sur I.



Exemple 3. On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-9;3]$.
Indiquer les extremums de g sur $[-9;3]$. On précisera les valeurs pour lesquels ils sont atteints.

x	-9		-3		2		3
Variations de g	7	↘	-4	↗	12	↘	1

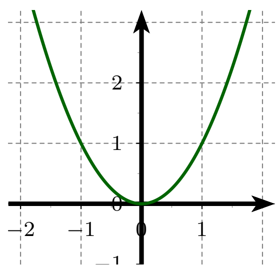
Exemple 4. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction f définie sur l'intervalle $[-4;5]$.
Construire le tableau de variations de f, on précisera ses extremums.



3. Quelques fonctions de référence

3. 1. Fonction carrée

Définition 4.
La **fonction carrée** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.
Sa courbe représentative est une **parabole**.



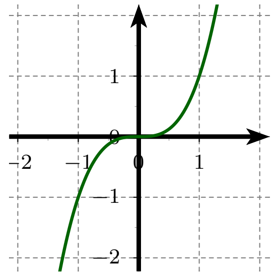
Propriété 1.

- Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.
- La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
- La fonction carrée est paire.
- Pour tous réels a et b, $(ab)^2 = a^2 \times b^2$
  De plus, si $b \neq 0$ alors $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

♣ **Démonstration 1.** Variations de la fonction carrée ⇒ voir feuille d'exercices.

3. 2. Fonction cube



Définition 5.
La **fonction cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

Propriété 2.

- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube est impaire.
- Pour tous réels a et b on a :
  $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ et $a^3 \leqslant b^3 \Leftrightarrow a \leqslant b$.

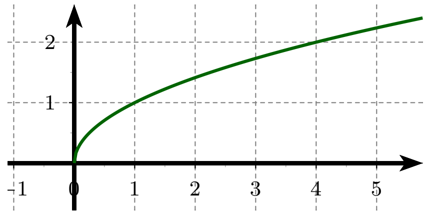
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	↗	0	↗

Exemple 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $8x^3 = -125$.

3. 3. Fonction racine carrée

Définition 6.

La **fonction racine carrée** est définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.
Pour tout réel positif x, la racine carrée de x est le nombre positif, noté $\sqrt{x}$, tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.



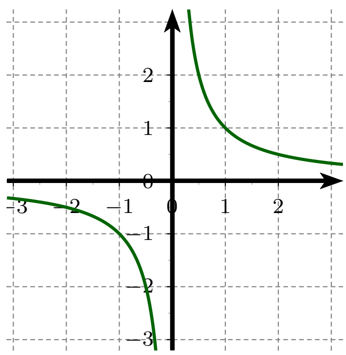
Propriété 3.

- On a $\sqrt{0} = 0$ et pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- Pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
  De plus, si $b \neq 0$ alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

♣ **Démonstration 2.** Variations de la fonction racine carrée $\Rightarrow$ voir feuille d'exercices.

3. 4. Fonction inverse



Définition 7.
La **fonction inverse** est définie sur $\mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Sa courbe représentative est une **hyperbole**.

Propriété 4.

- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- La fonction inverse est impaire.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

♣ **Démonstration 3.** Variations de la fonction inverse $\Rightarrow$ voir feuille d'exercices.