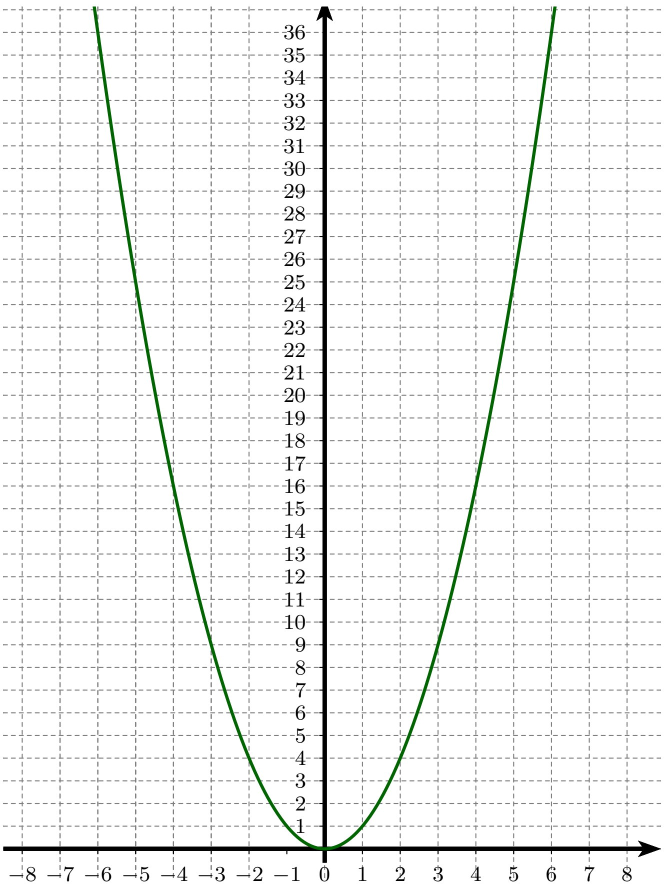
Feuille d'exercices 13
Seconde, 2019-2020



Exercice 1.
A l'aide de la représentation graphique de la fonction carrée ci-contre, répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

① Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés.

② Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$.

③ Si $x^2 = 9$, alors $x = 3$.

④ Si $-6 < x < -2$, alors $4 < x^2 < 36$.

⑤ Si $4 < x^2 < 36$, alors $-6 < x < -2$.

⑥ Si $-4 \leqslant x \leqslant 4$, alors $x^2 \leqslant 16$.

⑦ Si $x \in [-2; 3]$, alors $4 \leqslant x^2 \leqslant 16$.

Exercice 2.
Calculer les antécédents des nombres 0 ; 4 et 8 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$.

Exercice 3. ♣ **Démonstration**
On cherche à déterminer les variations de la fonction carrée.

① Rappeler l'ensemble de définition de la fonction carrée.

② Pour tous réels a et b, donner l'expression factorisée de $a^2 - b^2$.

③ **Raisonnement par disjonction de cas** :

A) Cas 1 : On étudie les variations de la fonction carrée sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On considère alors deux réels a et b tels que $a < b \leqslant 0$. On cherche à comparer a^2 et b^2.
  i. Quel est le signe de $a + b$?
  ii. Quel est le signe de $a - b$?
  iii. En déduire alors le signe de $(a - b)(a + b)$.
  iv. Conclure.

B) Cas 2 : Déterminer les variations de la fonction carrée sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On suivra les mêmes étapes que pour le cas 1.

Exercice 4. Calculer les images par la fonction cube de :

① 4 ② -6 ③ 5×10^4 ④ a^2b (a, b réels)

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $\dfrac{x^3}{3} = -9$ ② $5(3x-1)^3 = 8$ ③ $(2x-2)^3 = 10^6$ ④ $4x^3 \geqslant 32$ ⑤ $(x+6)^3 \leqslant 27$

EXERCICE 6.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -4x^3$.

① Démontrer que cette fonction est impaire.

② Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative ?

③ Sans calcul, donner la valeur de $f(500) + f(-500)$.

EXERCICE 7. Démonstration
On cherche à déterminer les variations de la fonction cube.

① Rappeler l'ensemble de définition de la fonction cube.

② Pour tous réels a et b, démontrer que $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

③ **Raisonnement par disjonction de cas** :

A) Cas 1 : On étudie les variations de la fonction carrée sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On considère alors deux réels a et b tels que $a < b \leqslant 0$. On cherche à comparer a^3 et b^3.
   i. Quel est le signe de $b - a$?
   ii. Quel est le signe de $a^2 + ab + b^2$?
   iii. En déduire alors le signe de $(b-a)(a^2 + ab + b^2)$.
   iv. Conclure.

B) Cas 2 : Déterminer les variations de la fonction cube sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
On suivra les mêmes étapes que pour le cas 1 avec a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.

C) Cas 3 : Cas où les réels a et b sont de signes contraires.
On suivra les mêmes étapes que pour le cas 1.

(a) Conclure.

EXERCICE 8.
Le nombre $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$ est-il entier ?

EXERCICE 9. ♣ **Démonstration**
On cherche à déterminer les variations de la fonction racine carrée.

① Rappeler l'ensemble de définition de la fonction racine carrée.

② On considère deux réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$. On cherche à comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
   (a) Démontrer que, pour tous réels a et b, $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.
   (b) Étudier alors le signe de cette différence.
   (c) Conclure.

EXERCICE 10.
En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants.

① $x \in [4; 8]$ ② $x \in [3000; 5000]$ ③ $x \in [-7; -2]$ ④ $x \in [-\frac{5}{3}; -\frac{4}{5}]$

EXERCICE 11. ♣ **Démonstration**
On cherche à déterminer les variations de la fonction inverse.

① Donner l'ensemble de définition de la fonction inverse.

② Démontrer que, pour tous réels a et b non nuls, $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.

③ **Raisonnement par disjonction de cas** :

A) Cas 1 : On étudie les variations de la fonction inverse sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
On considère alors deux réels a et b tels que $a < b < 0$. On cherche à comparer $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$.
   i. Étudier le signe de $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$.
   ii. Que peut-on en déduire de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$.

B) Cas 2 : Déterminer les variations de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On suivra les mêmes étapes que pour le cas 1 avec a et b deux réels tels que $0 < a < b$.