Chapitre 10 : Fonctions affines
Seconde, 2019-2020

1. Généralités sur les fonctions affines

1.1. Définition

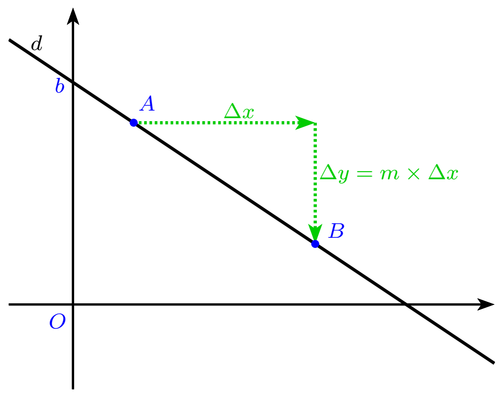
Définition 1.
Une **fonction affine** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec m et p des nombres réels.

- Si $m = 0$, alors $f(x) = p$. La fonction f est une **fonction constante**.
- Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$. La fonction f est une **fonction linéaire**. Elle traduit une situation de proportionnalité.

1.2. Représentation graphique

Propriété 1.
La fonction f est représentée graphiquement par la droite d d'équation $y = f(x)$, soit $y = mx + p$.

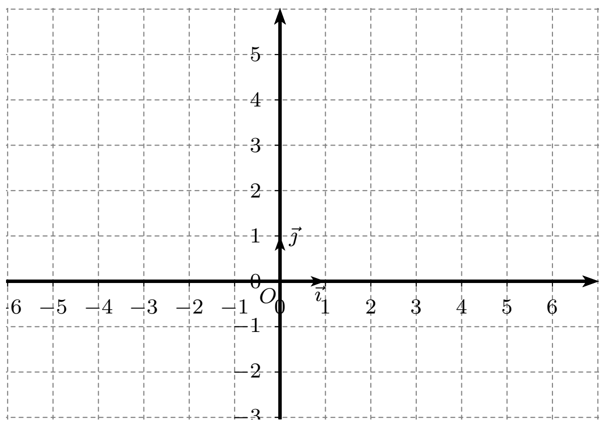
- p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.
  La droite passe par le point $(0; p)$.
- m est **le coefficient directeur** de d.
  Pour deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de d,
  $m = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



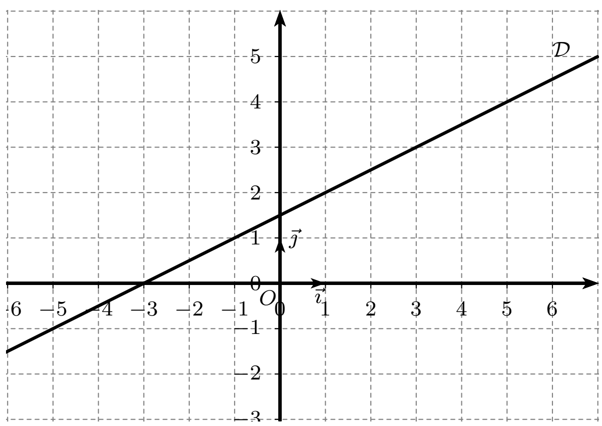
Remarque 1. Entre deux points de d, si x augmente de 1, y varie de m.

Remarque 2.
- Lorsque la fonction est constante, elle est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Lorsque la fonction est linéaire, elle est représentée par une droite passant par l'origine du repère.

Exemple 1. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$.



Exemple 2. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$.



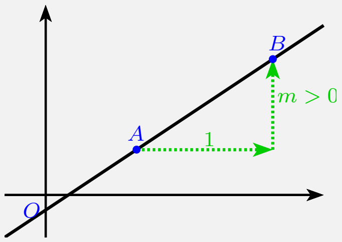
2. Sens de variation et signe d'une fonction affine

2. 1. Variation d'une fonction affine

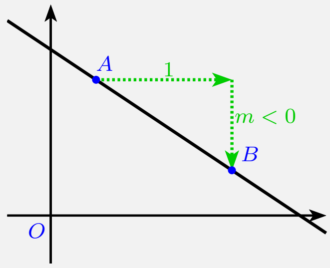
Propriété 2.

Soit f la fonction affine $x \mapsto mx + p$ (m et p des nombres réels, avec $m \neq 0$).

- Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



- Si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$



Propriété 3.

Dans un repère, deux droites d et d' d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur : $m = m'$.

Exemple 3. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ sachant que $A\,(2\,;\,1) \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}' : y = 3x - 1$.

2. 2. signe d'une fonction affine

Propriété 4.

Soit $m \neq 0$ et $p \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Le signe de $f(x)$ en fonction de x est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-m$	0	signe de m	

Remarque 3. La valeur $-\frac{p}{m}$ n'est pas à connaître par cœur, il suffit de résoudre l'équation $mx + p = 0$ pour la retrouver.

Exemple 4. Déterminer le tableau de signes des deux fonctions suivantes : $f(x) = -3x + 1$ et $g(x) = 2x + 5$.

3. Résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signes

3.1. Résolution d'une inéquation produit

☞ *Exemple :* Résolution de $(2x-7)(3-x)<0$.
On résout d'abord $f(x)=0 \iff (2x-7)(3-x)=0 \iff 2x-7=0$ ou $3-x=0 \iff x=\frac{7}{2}$ ou $x=3$.

x	$-\infty$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x-7$		$-$ - signe de 2		$-$ - signe de 2	0	$+$ signe de 2	
$3-x$		$+$ - signe de -1	0	$-$ signe de -1		$-$ signe de -1	
Signe de $(2x-7)\times(3-x)$		$-$ $\ominus\times\oplus$	0	$+$ $\ominus\times\ominus$	0	$-$ $\ominus\times\oplus$	

Une fois le tableau de signes dressé, on peut résoudre d'inéquations : on note l'ensemble des x pour lesquels l'expression est de signe « $-$ » : $(2x-7)(3-x)<0 \iff x\in]-\infty;3[\cup]\frac{7}{2};+\infty[$.

Exemple 5. Résoudre l'inéquation $(3x+2)(-x-4)\geqslant 0$

3.2. Résolution d'une inéquation quotient

☞ *Exemple :* Résolution de $\dfrac{1+x}{4-3x}\geqslant 0$.

D'abord on cherche d'éventuelles **valeurs interdites** : $4-3x=0 \iff -3x=-4 \iff x=\dfrac{4}{3}$.

Donc $\dfrac{4}{3}$ est une valeur interdite.
Puis on résout $1+x=0 \iff x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$4-3x$		$+$		$+$	‖	$-$	
Signe de $\dfrac{1+x}{4-3x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

D'après le tableau de signes on a : $\dfrac{1+x}{4-3x}\geqslant 0 \iff x\in[-1;\dfrac{4}{3}[$

Exemple 6. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-5}{8x+4}<0$