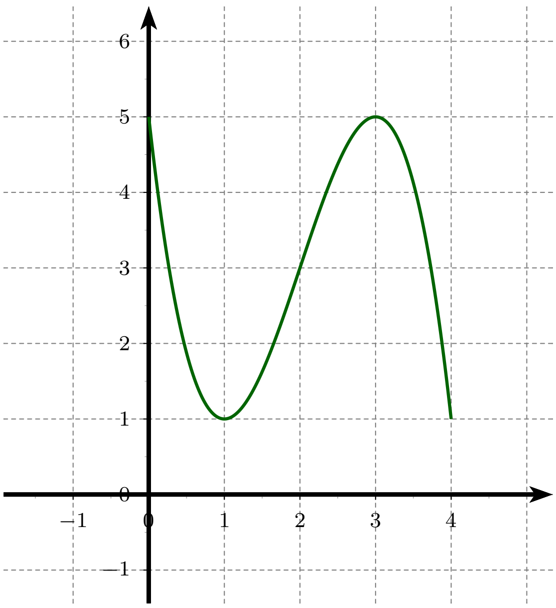
1. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

1. 1. Signe de la dérivée d'une fonction monotone

Propriété 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si f est **croissante** sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est **constante** sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Exemple 1. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction f définie par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.
Donner par lecture graphique, le signe de la dérivée de f sur l'intervalle $[0; 4]$.



1. 2. Sens de variation déduit du signe de la dérivée

Théorème 2.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est **décroissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

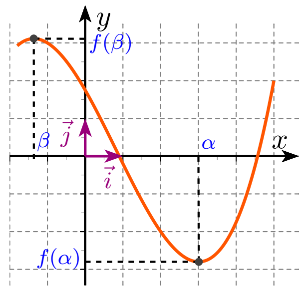
Exemple 2. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

2. Extremum d'une fonction

2. 1. Définition

Définition 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. m et M des réels.

- m est le **minimum** de f sur I si et seulement si :
  $f(x) \geqslant m$ pour tout x de I, et il existe un réel α dans I tel que $f(\alpha) = m$.
- M est le **maximum** de f sur I si et seulement si :
  $f(x) \leqslant M$ pour tout x de I, et il existe un réel β dans I tel que $f(\beta) = M$.

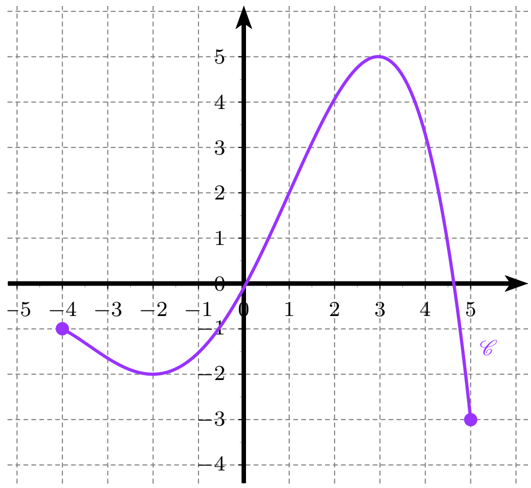


2. 2. Extremum local

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et c est un nombre réel de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant c tel que pour tout nombre réel x de J, $f(x) \leqslant f(c)$ (resp. $f(x) \geqslant f(c)$).

Remarque 1. On parle d'**extremum local** pour désigner un minimum ou un maximum local.

Exemple 3. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 5]$.
Déterminer les extremums de la fonction f. Existe-t-il des extremums locaux ?



2. 3. Extremum local et dérivée

Propriété 3.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et c est un nombre réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$.

Remarque 2. ⚠La réciproque de cette propriété est fausse ! Si f est la fonction cube alors $f'(0) = 0$ et $f(0)$ n'est pas un extremum local de f.

Remarque 3. Si $f(c)$ est un extremum local de f alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété 4.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et c est un nombre réel de I.
Si f' **s'annule et change de signe** en c, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

x		c	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	↗	$f(c)$	↘

$f(c)$ est un maximum local

x		c	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	↘	$f(c)$	↗

$f(c)$ est un minimum local

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 5$.
Déterminer les extremums locaux de la fonction f.