Chapitre 10 : Variables aléatoires réelles
1re-Spécialité mathématiques, 2019-2020

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

1.1. Variable aléatoire réelle (discrète)

Définition 1.
Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Définir une **variable aléatoire** sur Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

Vocabulaire et notation :

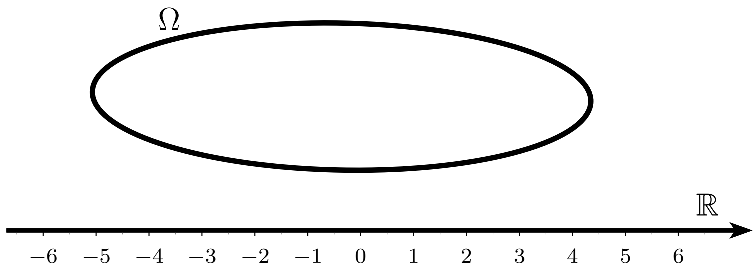
- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, ...
- les nombres réels x_1, x_2, ..., x_n désignent les valeurs prises par X, on note $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i ».
- Une variable aléatoire est dite **discrète** lorsque l'univers Ω est fini, c'est-à-dire lorsqu'il contient un nombre fini d'issues.

Exemple 1.
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note à chaque lancer, F quand on obtient Face et P quand on obtient Pile.
On convient que chaque Face fait gagner 3 euros et que chaque Pile fait perdre 2 euros.
Quelle indication signifie que la loi de probabilité est équirépartie (modèle d'équiprobabilité) ? ....

Lister les issues qui composent l'univers de l'expérience : $\Omega =$ ....

Soit G la variable aléatoire qui à chaque issue de Ω associe le gain ou la perte du joueur. Donner les valeurs prisent par G : ....

Compléter le diagramme ci-dessous :



1.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.
Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
X est une variable aléatoire discrète définie sur Ω qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n .
Définir **la loi de probabilité** de X, c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$), la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

On présente souvent la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

On vérifie alors $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... = P(X = x_n) = 1$.

Remarque 1. On dit aussi que X a pour loi de probabilité $(x_i; p_i)$ avec $p_i = P(X = x_i)$ pour $i \in \{1, ..., n\}$.

Exemple 2. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire G de l'**exemple 1.**

2. Paramètres d'une variable aléatoire

2.1. Espérance, variance, écart-type

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n.$$

- La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2.$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 2.
- L'espérance $E(X)$ s'interprète comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.
- L'écart-type $\sigma(X)$ mesure la dispersion des valeurs prises par X autour de l'espérance de gain $E(X)$.

Exemple 3. On reprend l'énoncé de l'**exemple 1.**

① (a) Calculer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G.

(b) Interpréter $E(G)$. Ce jeu est-il favorable, équitable ou défavorable au joueur ?

(c) Quelle mise d'entrée à ce jeu l'organisateur pourrait-il choisir pour que le jeu soit équitable.

② Calculer l'écart-type de la variable aléatoire G.

2.2. Propriétés de l'espérance et de la variance

Propriété 1.

Propriété de linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X)$, alors pour tous nombres réels a et b on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Remarque 3. $E(aX) = aE(X)$ autrement dit, si on multiplie par a toutes les valeurs prises par X, l'espérance est multipliée par a.

Propriété 2.

Soit X une variable aléatoire discrète de variance $V(X)$, alors pour tous nombres réels a et b on a :

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad V(X + b) = V(X)$$

Conséquence : $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$