CHAPITRE 2 : SUITES NUMÉRIQUES, MODÈLES DISCRETS
1re-Spécialité mathématiques, 2019-2020

1. Mode de génération d'une suite numérique

1. 1. Définition d'une suite numérique

Définition 1.
Une **suite** u est une fonction sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.
L'image du nombre entier naturel n par la suite u, notée $u(n)$ où u_n est appelée terme d'indice n ou de rang n de la suite.

Remarque 1.
- La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).
- u_{n+1} est le terme d'indice $(n+1)$, noté aussi $u(n+1)$.

Exemple 1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n+3$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

Exemple 2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)^2$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_8.

1. 2. Suite définie par une relation de récurrence

Définition 2.
Une suite est définie par une relation de récurrence quand elle est définie par la donnée de :
- son premier terme.
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant (On exprime u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n). Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Exemple 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = -2u_n + 3$. Calculer u_1 et u_2.

Exemple 4. L'algorithme ci-contre, calcul et affiche u_n.
Donner le premier terme de (u_n) ainsi que sa relation par récurrence. On précisera la valeur affichée en sortie pour $n = 3$.

```
u ⟵ 80
Pour i allant de 1 à n
u ⟵ (1/2)u + 4
Fin Pour
```

1. 3. Suite définie par une formule explicite

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n ($u_n = f(n)$). Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Exemple 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1+3n$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

Exemple 6. L'algorithme ci-contre, calcul et affiche u_n.
Donner le premier terme de (u_n) ainsi que sa forme explicite. On précisera les valeurs affichées en sortie pour $n = 5$.

```
Pour i allant de 0 à n
Afficher i^2 + 2
Fin Pour
```

2. Sens de variation et notion de limite d'une suite numérique

2.1. Sens de variation d'une suite

Définition 3.
Soit u est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.
- la suite u est **croissante** si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- la suite u est **décroissante** si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Remarque 2. lorsque la suite u est définie à partir du rang n_0 :
- Si u est croissante, alors pour tout $n > n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$.
- Si u est décroissante, alors pour tout $n > n_0$, $u_n \leqslant u_{n_0}$.

Propriété 1.

Soit u est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.
- Si, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est **croissante**.
- Si, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est **décroissante**.

Exemple 7. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4n + 3$.

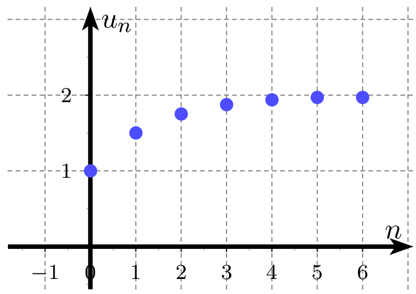
Exemple 8. Étudier le sens de variation de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = v_n - 3n^2$ avec $v_0 = 1$.

Propriété 2.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
- Si la fonction f est **croissante** sur $[0; +\infty[$, alors la suite u est **croissante**.
- Si la fonction f est **décroissante** sur $[0; +\infty[$, alors la suite u est **décroissante**.

2.2. Notion de limite d'une suite

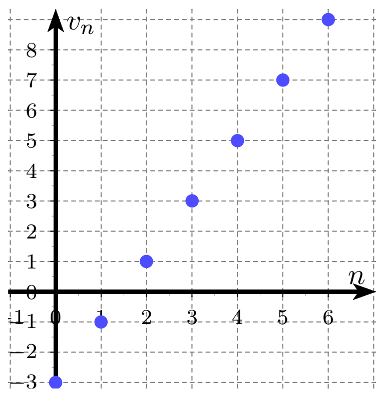
Définition 4.
Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) **converge** vers l et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$



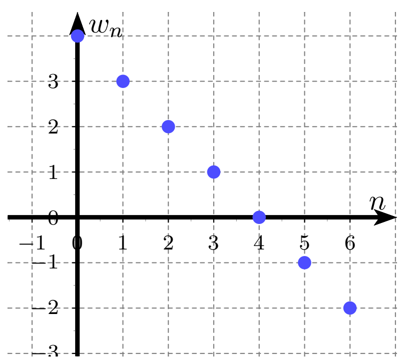
Propriété 3.

Une suite (u_n) est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Exemple 9.



$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$



$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

3. Suites arithmétiques

3. 1. Suite arithmétique de raison r

Définition 5.
Dire qu'une suite u est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre réel r tel que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite u.

Remarque 3.
Autrement dit, une suite est arithmétique si et seulement si chaque terme (sauf le premier) est obtenu en ajoutant au terme précédent un réel r, toujours le même.

Exemple 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $r = 4$.

① Définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
② Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exemple 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique dont le terme de rang 5 est $u_5 = 72$ de raison $r = -6$.

① Calculer u_6 et u_7.
② Calculer u_4.

Propriété 4.

Une suite arithmétique de raison r est croissante si et seulement si $r > 0$ et décroissante si et seulement si $r < 0$.

3. 2. Formule explicite

Propriété 5.

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous nombres entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

♣ **Démonstration 1.**

- Cas où $n \geqslant p$:
- Cas où $n \leqslant p$:

Exemple 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ de raison $r = 2$

① Pour nombre entier naturel n, donner l'expression de la suite (u_n) en fonction de n.
② Calculer u_1 et u_7.
③ Calculer le terme au rang 12.

Exemple 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 8 et $u_3 = -40$. Calculer u_9.

3. 3. Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 6.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

♣ **Démonstration 2.**

Exemple 14. Calculer $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 150$

4. Suites géométriques

4.1. Suite géométrique de raison q

Définition 6.
Dire qu'une suite u est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre réel q tel que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre réel q est appelé **raison** de la suite u.

Remarque 4. Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

Exemple 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $q = -2$.

① Définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

② Calculer u_1, u_2 et u_3.

4.2. Formule explicite

Propriété 7.

Si u est une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$) alors, pour tous nombres entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

♣ **Démonstration 3.**

- Cas où $n \geqslant p$:
- Cas où $n \leqslant p$:

Exemple 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ de raison $q = 2$.

① Calculer u_1 et u_7.

② Calculer le terme au rang 5.

Exemple 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $u_3 = -40$. Calculer u_6.

4.3. Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété 8.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante} & \text{si } u_0 > 0. \\ \text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante} & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante} & \text{si } u_0 > 0. \\ \text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante} & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite (u_n) est constante.
- Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone.

4.4. Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 9.

Si $q \neq 1$, alors pour tout nombre entier naturel n, $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

♣ **Démonstration 4.**

Exemple 18. Calculer $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{12}$