# 1. Fonctions polynôme de degré 2

## 1.1. Les fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

**Définition 1.**
Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ désignent des nombres réels avec $a \neq 0$. Cette écriture est la **forme développée** de $f$.

**Remarque 1.** Une fonction polynôme du second degré est aussi appelée fonction trinôme du second degré ou plus simplement fonction trinôme.

## 1.2. Forme canonique

**Propriété 1.**

Toute fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admet pour **forme canonique** $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

**Démonstration 1.**
Pour tout nombre réel $x$ :
$a(x-\alpha)^2 + \beta =$

**Exemple 1.** Déterminer la forme canonique de la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 6x + \dfrac{5}{4}$.

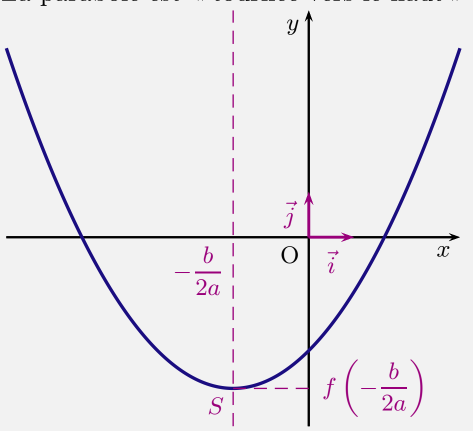
## 1.3. Courbe représentative et variations

**Propriété 2.**

Dans un repère orthogonal du plan, $f$ est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet $S(\alpha;\beta)$ et l'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$.

cas $a > 0$

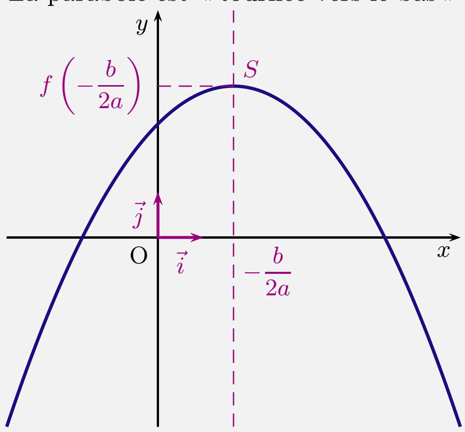
La parabole est « tournée vers le haut »




| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| Variations de $f$ | ↘ | $f(-\dfrac{b}{2a})$ | ↗ |

cas $a < 0$

La parabole est « tournée vers le bas »




| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| Variations de $f$ | ↗ | $f(-\dfrac{b}{2a})$ | ↘ |

# 2. Équations du second degré

## 2.1. Définitions

**Définition 2.**
Une **équation du second degré** à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $a \neq 0$.

**Définition 3.**
Les solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ sont appelées les **racines** du polynôme du second degré $ax^2+bx+c$.

## 2.2. Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$

**Définition 4.**
Le nombre réel $b^2-4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2+bx+c$. Il est noté $\Delta$.

**Théorème 3.**

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta < 0$ : l'équation n'admet pas de solution réelle ;
- Si $\Delta = 0$ : L'équation admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ ;
- Si $\Delta > 0$ : L'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

♣ **Démonstration 2.**
Montrer que résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ revient à résoudre $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$.

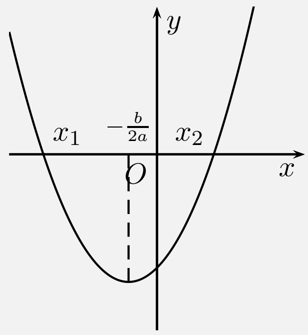
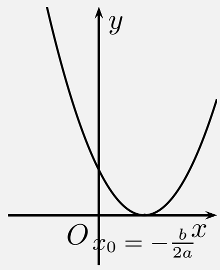
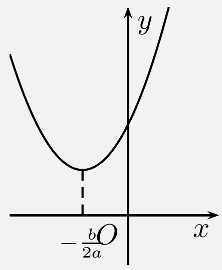
Le nombre de solutions dépend du signe de $\Delta$.

-
-
-

**Exemple 2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
① $-5x^2+8x-2=0$ ② $3x^2-x+1=0$ ③ $4x^2+6x+\dfrac{9}{4}=0$

## 2.3. Interprétation graphique

**Propriété 4.**

| Signe de $\Delta$ | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| Solution de l'équation<br>$ax^2 + bx + c = 0$ | Deux solutions réelles distinctes<br>$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | Une unique solution<br>$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ | Pas de solution réelle |
| Courbe représentative de $f$ dans un repère<br>⚠Dans le cas où $a > 0$ |  |  |  |

**Remarque 2.**

- ⋆ Chercher à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à chercher les points d'intersection de la parabole $\mathcal{P} : ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses.
- ⋆ Dans le cas où $\Delta = 0$, l'unique solution $x_0$ est appelée racine double du trinôme (dans ce cas $x_1 = x_2$).

## 2.4. Somme et produit des racines d'un trinôme

**Propriété 5.**

Soit $f$ une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Si $f$ admet les réels $x_1$ et $x_2$ pour racines, alors :

- La **somme** des racines est : $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ ;
- Le **produit** des racines est : $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

**Remarque 3.** Si on connaît une racine d'une fonction polynôme du second degré, on peut calculer l'autre racine en utilisant la somme ou le produit des racines.
Lorsque cela est possible, on cherchera une **racine évidente** parmi des nombres simples comme 1, $-1$, 2, $-2$, etc.

**Démonstration 3.**

**Exemple 3.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$. Déterminer une racine évidente de $f$, puis l'autre solution.

**Exemple 4.** Déterminer une fonction polynôme du second degré admettant les racines $-6$ et $8$.

# 3. Factorisation et signe d'un trinôme du second degré

## 3. 1. Forme factorisée d'un trinôme de degré 2

Propriété 6.

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta$ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$, alors pour tout réel $x$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel $x$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0$ est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas.

**Exemple 5.** Factoriser les trinômes suivants (utiliser les résultats de l'**exemple 2**) :

① $-5x^2 + 8x - 2$

② $3x^2 - x + 1$

③ $4x^2 + 6x + \dfrac{9}{4}$

## 3. 2. Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Propriété 7.

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta$ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts $x_1$ et $x_2$.
  Si $x_1 < x_2$, le tableau de signes du trinôme est :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2 + bx + c$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

- Si $\Delta = 0$, le trinôme a même signe que $a$ pour tout réel $x$ et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme a même signe que $a$ pour tout réel $x$.

**Exemple 6.** Déterminer le signe des trinômes suivants (utiliser, si besoin, les résultats de l'**exemple 2**) :

① $-5x^2 + 8x - 2$

② $3x^2 - x + 1$

③ $4x^2 + 6x + \dfrac{9}{4}$

**Exemple 7.** Paul affirme : « L'inéquation $x^2 + 4x - 4 < 0$ n'a pas de solution ». Que peut-on en penser ?