Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles et indépendance
1re-Spécialité mathématiques, 2019-2020

# 1. Probabilités conditionnelles

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.
On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega$ et $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ deux évènements.

## 1. 1. définition et propriétés

**Définition 1.** Soit $A$ et $B$ deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité que l'événement *B* se réalise sachant que l'événement *A* est réalisé** est le nombre noté $P_A(B)$, et est défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Remarque 1.**
- $P_A(B)$ se lit : « probabilité de $B$ sachant $A$ ».
- Si $P(B) \neq 0$, on définit de même $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

**Exemple 1.**
Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A, dans 40% des cas à une panne B, et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes. Notons :
- $A$ l'événement : « l'appareil présente la panne A »
- $B$ l'événement : « l'appareil présente la panne B »

Un appareil choisi au hasard présente la panne B.
Quelle est la probabilité que cet appareil présente également la panne A ?

**Propriété 1.**

**Formules des probabilités composées**
Si $A$ et $B$ sont deux événements non vides de $\Omega$, on a :

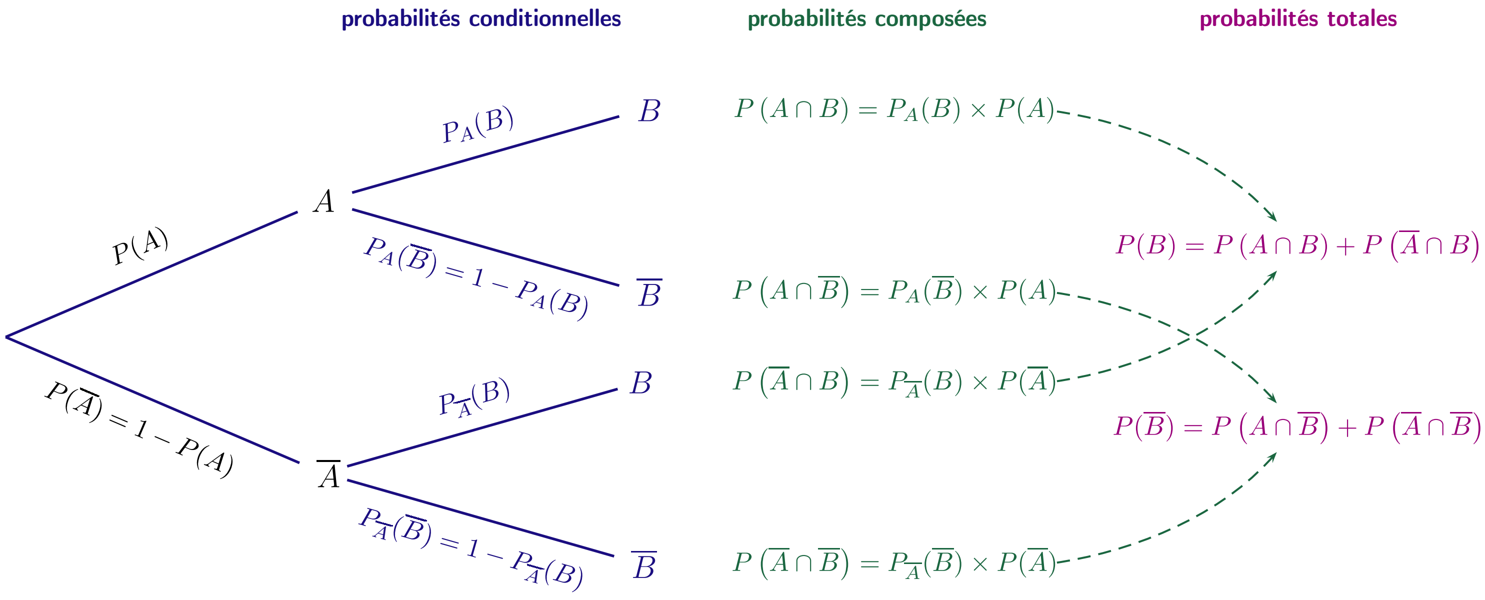
$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

**Exemple 2.**
85% d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.
Soit $V$ l'événement : « Un individu est vacciné » et $M$ l'événement : « Un individu est malade ».
Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

### 1.2. Arbre pondéré et calculs de probabilité

Règles :

- ⋆ La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- ⋆ La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches. (*probabilités composées*)
- ⋆ La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet événement. (*probabilités totales*)




**Exemple 3.** Lorsqu'il tire durant un match de basketball, Sylvain a 67% de chance que ce soit un tir à 2 points et 33% que ce soit un tir à 3 points.
De plus, quand il tire à 2 points, le pourcentage de réussite de Sylvain est de 59% contre 45% lorsqu'il tire à 3 points. On considère les événements $D$ : « il tire à 2 points » et $M$ : « il marque ».
Représenter la situation par un arbre pondéré.

## 2. Probabilités totales

### 2.1. Partition de l'univers

**Définition 2.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble d'événements de probabilités non nulles d'un même univers $\Omega$.

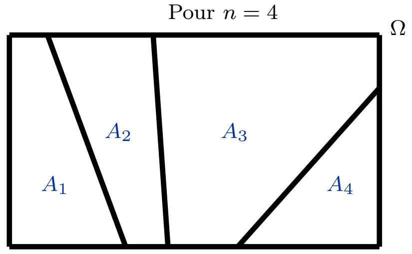
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition de l'univers** $\Omega$ si, et seulement si, tout événement élémentaire de $\Omega$ appartient à l'un des événements $A_i$ et à un seul. C'est-à-dire si, et seulement si,

① $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

② $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

**Exemple 4.**

Pour $n = 4$




**Remarque 2.** Un événement $A$ de probabilité non nulle et son événement contraire $\overline{A}$ forment une partition de $\Omega$.

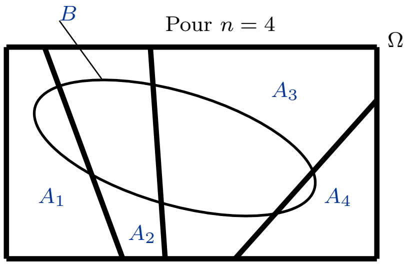
### 2.2. Formule des probabilités totales

**Propriété 2.**

**Formules des probabilités totales**
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de $\Omega$ alors pour tout événement $B$ de $\Omega$,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

**Exemple 5.**




**Exemple 6.** On reprend l'énoncé de l'**exemple** 3.
Calculer la probabilité que Sylvain marque.

## 3. Événements indépendants

### 3.1. Indépendance de deux événements

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la donnée de la réalisation de l'un des deux événements n'a pas d'incidence sur la probabilité de la réalisation de l'autre.

**Définition 3.**
Soit $A$ et $B$ sont deux événements de probabilités non nulles
Les évènements $A$ et $B$ sont **indépendants** si et seulement si on a l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

⚠ Ne pas confondre « $A$ et $B$ indépendants » et « $A$ et $B$ incompatibles ».
Dire que $A$ et $B$ sont incompatibles signifie que $A \cap B = \varnothing$ .

**Propriété 3.**

Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants de probabilités non nulles, il y a équivalence d'écrire :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ; $P_A(B) = P(B)$ ; $P_B(A) = P(A)$

**Propriété 4.**

Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants alors les événements $\bar{A}$ et $B$ le sont aussi.

### 3.2. Succession de deux épreuves indépendantes

**Définition 4.**
En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

### 3.3. Représentation par un arbre et par un tableau

**Exemple 7.** Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores qui ne sont pas synchronisés.
Lorsqu'il se présente, la probabilité que le premier feu soit vert est de $0,45$ et la probabilité que le deuxième feu soit vert est de $0,4$
On considère les événements $V_1$ : « le premier feu est vert » et $V_2$ : « le deuxième feu est vert ».
Pourquoi peut-on dire que les événements $V_1$ et $V_2$ sont indépendants ? Représenter la situation par un arbre, puis par un tableau à double entrée.