Feuille d'exercices 12 : Fonctions trigonométriques
1re-Spécialité mathématiques, 2019-2020

Exercice 1. ♣ Démonstration

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, M le point associé à $\dfrac{\pi}{3}$ sur le cercle $\mathscr{C}$ et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

① Faire une figure.

② Quelle est la nature du triangle OMI ?

③ En déduire la longueur OH.

④ Calculer la valeur exacte de la longueur MH.

⑤ En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2. ♣ Démonstration

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, M le point associé à $\dfrac{\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$ et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
En suivante la même démarche que pour l'**Exercice 1**, trouver les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 3.

① (a) Déterminer un réel x appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ associé à $\dfrac{99\pi}{4}$.

(b) En déduire $\cos\left(\dfrac{99\pi}{4}\right)$, puis $\sin\left(\dfrac{99\pi}{4}\right)$.

② Calculer $\cos\left(\dfrac{-13\pi}{6}\right)$.

③ Calculer $\sin\left(\dfrac{31\pi}{3}\right)$.

Exercice 4.

① Tracer le cercle trigonométrique et placer le point A associé au réel $\dfrac{\pi}{6}$.

② Placer le point B, symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Donner le réel associé à ce point dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

③ Placer le point C, symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées. Donner le réel associé à ce point dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

④ Placer le point D, symétrique de A par rapport à O. Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ puis dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

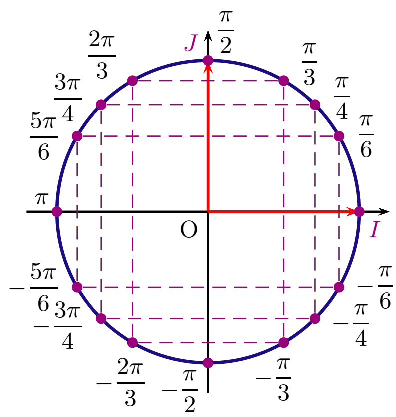
Exercice 5.

① Résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

② Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

③ Résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

④ Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Exercice 6.

① Résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

② Résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) < 0$.

③ En déduire sur $]-\pi; \pi]$ les solutions du système d'inéquation suivant : $\begin{cases} \cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \\ \sin(x) < 0 \end{cases}$

Rappel 1.

Fonction paire, fonction impaire

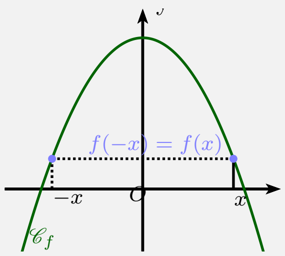
On considère une fonction f définie sur l'ensemble D.

- On dit que la fonction f est **paire** si D est centré en 0 et pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$.
- On dit que la fonction f est **impaire** si D est centré en 0 et pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique dans un repère orthogonal

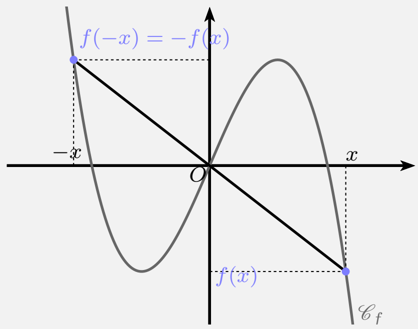
Fonction paire

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Fonction impaire

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



EXERCICE 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(4x)\sin^2(4x)$.

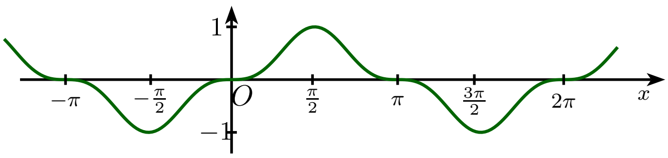
① Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.

② Montrer que f est $\dfrac{\pi}{2}$-périodique.

EXERCICE 8.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x)).$$



① À l'aide de la courbe représentative de g ci-contre, conjecturer la parité et la périodicité de g.

② Calculer $g(x) + g(-x)$ et en déduire que g est impaire.

③ Montrer que g est périodique et préciser sa période.

EXERCICE 9.

On considère la fonction tangente, notée tan, définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

① Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = 0$. En déduire le domaine de définition de la fonction tangente.

② Montrer que tan est impaire. Interpréter graphiquement.

③ Montrer que tan est π-périodique. Interpréter graphiquement.

④ ✎ Compléter le tableau ci-contre.

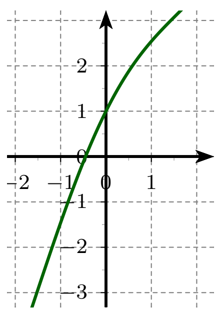
⑤ Tracer la représentation graphique de tan sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				
$\tan(x)$				

EXERCICE 10.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \cos(x)$.

On donne la courbe représentative de f ci-contre.



① f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

② Montrer que, pour tout réel x, $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1$. Interpréter graphiquement.