Chapitre 7 : Fonction exponentielle
1$^{\text{re}}$-Spécialité maths, 2019-2020

1. Caractérisation de la fonction exponentielle

1.1. Définition et propriétés

Définition 1.
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, elle est notée $\exp : x \mapsto \exp(x)$.
Ainsi pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Remarque 1. L'existence de la fonction exponentielle est admise.

Propriété 1.

Pour tout réel x, on a $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.
Conséquence : pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Exemple 1. Pour chacune des fonctions suivantes définie sur $\mathbb{R}$, déterminer sa fonction dérivée.
① $f(x) = 3\exp(x) + 4x^2$ ② $g(x) = (5x+4)\exp(x)$ ③ $h(x) = 2x^3\exp(x)$

1.2. Relation fonctionnelle

Propriété 2.

Relation fonctionnelle
Pour tous x, y réels,

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Démonstration 1. Soit y un nombre réel donné et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

1.3. Conséquence de la relation fonctionnelle

Propriété 3.

Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ ② $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ ③ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Exemple 2. Simplifier les expressions suivantes :

① $A = \exp(2x-3) \times \exp(-3x-1)$ ② $B = (\exp(4x))^2 \times \exp(-6x+3)$ ③ $C = \dfrac{\exp(-2x+7)}{\exp(-5x-1)}$

2. Notation e

2.1. Nombre e et notation e^x

Définition 2. L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
Ainsi $\exp(1) = e$.

Remarque 2. Le nombre e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Ce nombre est un irrationnel et une valeur approchée est $e \approx 2,711828$.

2.2. Propriétés algébriques avec la nouvelle notation

Propriété 4.

Pour tout nombre réel x, on a : $\exp(x) = e^x$

Propriété 5.

Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :
① $e^0 = 1$ ② $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ③ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ ④ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ⑤ $e^{nx} = (e^x)^n$

Exemple 3. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

① $e^2 \times e^3 \times e^{-4} =$

② $\dfrac{e^{-7}}{e^2} =$

③ $e \times (e^x)^3 =$

④ $\dfrac{e^{-1} \times e^{-4}}{(e^2)^2 \times e^{-2x}}$

2.3. Lien avec les suites géométriques

Propriété 6.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{an}$ est une suite géométrique de raison e^a.

Exemple 4. Donner la raison de la suite géométrique (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{3,5n}$

3. Étude de la fonction exponentielle

3.1. Signe de la fonction exponentielle

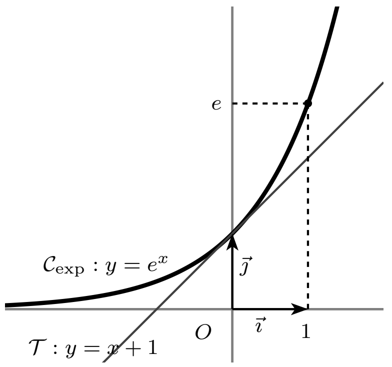
Propriété 7.

La fonction exponentielle est strictement positive.
Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

3.2. Représentation graphique et tableau de variation

Propriété 8.

La fonction exponentielle est strictement croissante.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

3.3. Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété 9.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a pour tous réels a et b :
- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b$

Exemple 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

① $3e^{-4x+1} - 3e = 0$ ② $e^{3x+2} = e^{-4}$ ③ $e^{x^2} - e^9 = 0$

Exemple 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

① $e^{3x+1} > 1$ ② $e^{-2x+2} \geqslant e^4$ ③ $e^{x+1} + e^{-7x+9} < 0$

3.4. Exponentielle d'une fonction affine

Propriété 10.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$, alors f est dérivable et $f'(x) = a \times e^{ax+b} = a \times f(x)$

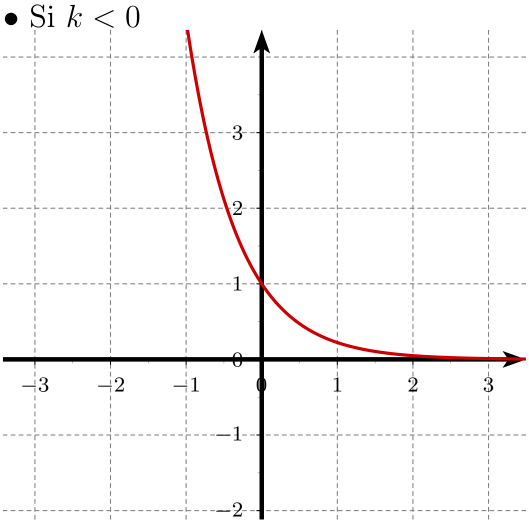
Exemple 7. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x-3}$.

Propriété 11.

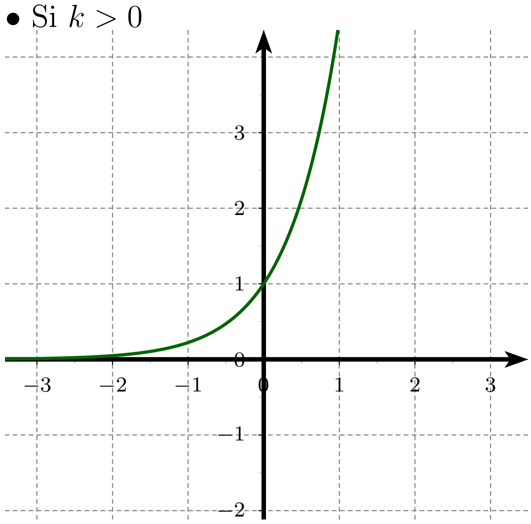
Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$.
- Si $k > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe de la fonction $x \mapsto e^{kx}$ à l'allure suivante :

- Si $k < 0$



- Si $k > 0$



Exemple 8. Indiquer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$.