Chapitre 3 : Dérivation
1re-Spécialité mathématiques, 2019-2020

1. Nombre dérivé et tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ sont deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

1.1. Taux de variation

Définition 1.
Le **taux de variation** de la fonction f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 1. Soit f la fonction $x \mapsto x^2$. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.

1.2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition 2.
- Dire que la fonction f est dérivable en a signifie que le taux de variation de f entre a et $a+h$ a pour limite un nombre réel lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre réel, lorsqu'il existe est appelé **nombre dérivé de f en a** et il est noté $f'(a)$.

Remarque 1.
Lorsque f est dérivable en a, on a ainsi $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

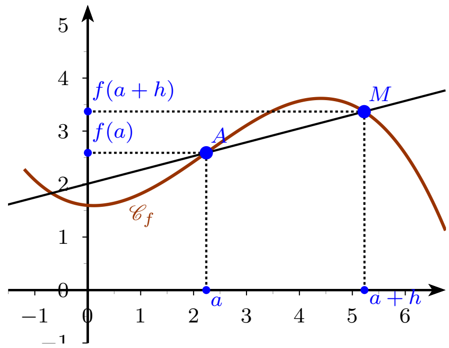
Exemple 2. On reprend la fonction f de l'exemple 1. Calculer $f'(2)$.

1.3. Tangente à la courbe représentative d'une fonction

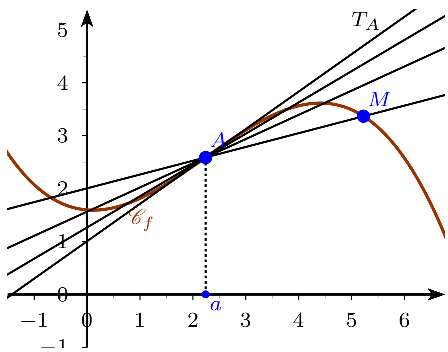
1.31 Interprétation graphique

Dans repère, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f.
A et M sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$ avec $h \neq 0$.

- Le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

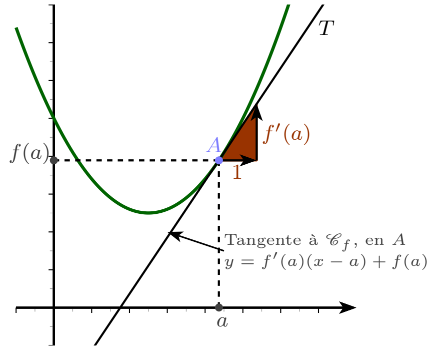


- Dire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0, c'est dire que lorsque le point M tend sur la courbe $\mathscr{C}_f$ vers le point A, les droites (AM) tendent vers une « position limite » : celle de la droite T_A passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette droite semble presque confondue avec la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de A.



1.32 Équation de la tangente

Définition 3.
Dans un repère, soit f une fonction dérivable en a.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété 1.

Dans un repère, l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

♣ **Démonstration 1.** La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ a une équation de la forme : $y = mx + p$ avec m, $p \in \mathbb{R}$.

Exemple 3. On reprend la fonction f de l'exemple 1 et 2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 2.

2. Fonctions dérivées

Définition 4.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout nombre réel x de I.
La fonction qui a tout nombre réel x de I associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. Cette fonction est notée f' et elle est définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

2. 1. Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 2.

Fonction	Fonction f	Fonction dérivée f'	f étant dérivable sur
Constante	$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
Identité	$f(x) = x$	1	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x) = mx + p$ avec m, $p \in \mathbb{R}$	m	$\mathbb{R}$
Carrée	$f(x) = x^2$	$2x$	$\mathbb{R}$
Cube	$f(x) = x^3$	$3x^2$	$\mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$ (avec $x \geqslant 0$)	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

♣ **Démonstration 2.** On suppose que $a \in \mathbb{R}$, $a + h \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$.
Pour $f(x) = x^2$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

♣ **Démonstration 3.** Soit $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. On suppose que $a \in D$, $a + h \in D$ et $h \neq 0$.
Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

Remarque 2.
⚠La fonction racine carrée est définie en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

♣ **Démonstration 4.** Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ et $h > 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

2.2. Fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ $(n \in Z)$

Propriété 3.

Pour tout entier relatif n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si n est négatif) par $f(x) = x^n$ est dérivable sur sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si n est négatif), et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif) $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$. Calculer la fonction dérivée de f.

Exemple 5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$. Calculer la fonction dérivée de g.

3. Dérivées et opérations

3.1. Somme et produit par un réel

Propriété 4.

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Remarque 3. On peut noter $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple 6. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$.

Propriété 5.

Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un réel et u est dérivable sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \lambda u'(x)$.

Remarque 4. On peut noter $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Exemple 7. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$.

Exemple 8. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = -4\sqrt{x}$.

Définition 5.
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme** si $f(x)$ peut s'écrire comme somme de termes de la forme kx^n avec $n \in N$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

Propriété 6.

Toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exemple 9. Soit la fonction f définie par $f(x) = -4x^5 - 2x^2 + 4x - 9$.
Donner l'ensemble de définition de f. En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée f'.

3. 2. Produit, inverse et quotient

Propriété 7.

Si $f(x) = u(x)v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Remarque 5. On peut noter $(uv)' = u'v + uv'$.

♣ **Démonstration 5.** On suppose que $a \in I$, $a + h \in I$ et $h \neq 0$.
Pour $f(x) = u(x)v(x)$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

Exemple 10. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$.

Propriété 8.

- Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$.
- Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $v(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Remarque 6. On peut noter $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 11. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-3}{2x^2}$.

Exemple 12. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+2}$.

Définition 6.
Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont des fonctions polynômes s'appellent des **fonctions rationnelles**.

Propriété 9.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple 13. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{-3x^2+4x-2}$.
Donner l'ensemble de définition de f. En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée f'.

3. 3. Fonction dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

Propriété 10.

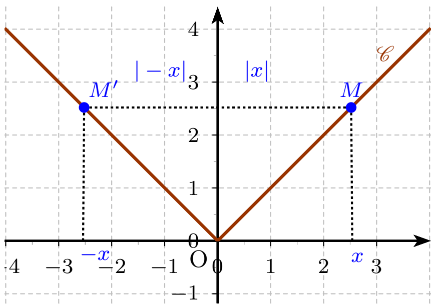
Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si a et b sont deux nombres réels tels que pour tout x de I, $ax+b$ appartient à J, alors la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout nombre réel de I, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Exemple 14. Soit la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-6}$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, puis sa fonction dérivée.

3. 4. Fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

Définition 7.
La **valeur absolue** d'un nombre réel x est égale à x si x est positif, à $-x$ si x est négatif. La valeur absolue du nombre x, notée $|x|$ est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$



Exemple 15. Calculer :

$|3| =$ $\qquad$ $|-6| =$ $\qquad$ $|5-9| =$ $\qquad$ $|\pi-4| =$

Propriété 11.

La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

♣ **Démonstration 6.**